Beiträge zur Dynamik und Thermodynamik der Atmosphäre

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der hohen philosophischen Fakultät der Georg August-Universität

zu Göttingen

vorgelegt von

E. A. Ansel

aus Ulm

Gedruckt bei Hubert & Co., G. m. b. H. in Göttingen

Referent: Herr Geh. Reg.-Rat Prof. E. Wiechert

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Juli 1913

Inhaltsverzeichnis.

§ 1. Flächenscharen zur Darstellung der Zustandsverteilung in der Atmosphäre.

Die trockene atmosphärische Luft folgt in dem Bereich des Druckes und der Temperatur der unteren Luftschichten, in denen die umfangreichsten atmosphärischen Störungen sich abspielen, mit großer Annäherung dem Boyle-Mariotte'schen Gesetz für ideale Gase:

1) $$pv = RT$$

wobei: p den Druck, T die absolute Temperatur, R die Gaskonstante bedeuten. Unter v soll das Volumen der Masseneinheit, das spezifische Volumen, verstanden werden. Dichte und spez. Volumen sind miteinander verbunden durch die Beziehung:

2) $$\varrho v = 1.$$

Der physikalische Zustand der Luft an einer Raumstelle ist vollständig bestimmt durch zwei der drei Zustandsparameter, von denen p und T, weil der Beobachtung und Messung leicht zugänglich, im folgenden zur Charakterisierung des Luftzustandes dienen sollen. Wenn theoretische Erwägungen die Wahl anderer Zustandsparameter, z. B. der Energie, Entropie, den thermodynamischen Potentialen, empfehlen, so steht ihrer Einführung nichts entgegen, vorausgesetzt, daß sie für individuelle Luftmassen definierbar sind. Die Zustandsparameter, z. B. Druck und Temperatur, werden in der Atmosphäre als Funktionen des Ortes betrachtet. Die Übertragung dieser Parameter auf individuelle Massen zur Bestimmung sowie zum Vergleich ihrer Zustände ist statthaft, wenn dabei die Massen unter sich gleich und von solcher Größe sind,

daß der Zustand jedes einzelnen Massenelementes durch bestimmte Werte der Zustandsparameter gekennzeichnet ist. Die thermodynamischen Vorgänge werden daher im folgenden stets auf die Massen-Einheit (M.E.) trockener atmosphärischer Luft bezogen.

Die in der Atmosphäre vorkommenden Zustände lassen sich thermodynamisch in zwei Kategorien einteilen, 1. adiabatische die von einer M.E. ohne Wärmeaufnahme oder -Entziehung durchlaufen werden können, und in die Gesamtheit der übrigen Zustände, die von einer M.E. von gegebenem Anfangszustand nur mittels Wärmezufuhr oder -Entziehung zu erreichen sind. Um aus zwei gegebenen Zuständen zu ersehen, ob eine adiabatische Überführung zwischen ihnen möglich ist oder nicht, kann man sich zweckmäßig eines Zustandsdiagrammes (graphische Darstellung der Zustandsgleichung $p = R\varrho T$) bedienen und die Punkte, welche die gegebenen Zustände repräsentieren, aufsuchen. Liegen sie nicht auf der gleichen Adiabate:

$$\frac{p}{\varrho^{\varkappa}} = \text{const.} \qquad (\varkappa = 1{,}44) \tag{3}$$

dann ist eine adiabatische Überführung zwischen ihnen nicht möglich. Von zwei M.E., die keinen gemeinschaftlichen Wert von $p/\varrho^{\varkappa} = \text{const.}$ besitzen, ist dann diejenige potentiell[1]) wärmer, die den größeren Parameterwert von $p/\varrho^{\varkappa}$ hat. Weil bei allen umkehrbaren adiabatischen Zustandsänderungen die Entropie[2]) einer gegebenen Luftmasse nicht geändert wird, sollen die adiabatisch ineinander überführbaren Zustände als isentrope bezeichnet werden. Entropieunterschiede zwischen gleichen Massen zeigen an, daß der Masse von niederer Entropie Wärme zugeführt werden muß, um sie auf die höhere Entropie zu bringen. Bei Massen unter verschiedenen Temperaturen ist diese Unterscheidung aus ihrer Temperatur allein nicht möglich. Für die Überführung einer M.E. Luft zwischen zwei gegebenen Zuständen stehen unendlich viele thermodynamische Wege zu Gebote, jede einzelne Überführung bedeutet thermodynamisch einen Teilprozeß, und die aufzunehmende oder zu entziehende Wärmemenge ist abhängig vom Weg der Zustandsänderung. Daher ist der Wärmeumsatz bei einem Teilprozeß, von dem nur der Anfangs- und End-

---

[1]) In Anlehnung an den von v. Bezold eingeführten Begriff der potentiellen Temperatur.

[2]) S. S. 4, Gl. 6.

zustand bekannt sind, aus diesen allein nicht ermittelbar, ebensowenig lassen sich die Zustandsunterschiede zwischen Luftmassen durch Wärmemengen ausdrücken. Die Energie der Wärme wird aber allgemein als Ursache aller atmosphärischen Bewegungen anerkannt, da es jedoch ein Maß für die in einer M.E. Luft aufgespeicherte Wärme nicht gibt, so läßt sich der Zusammenhang zwischen den Bewegungsvorgängen und der ungleichartigen Wärmeverteilung, die in den Zustandsverschiedenheiten sich äußert, mit der Wärme selbst nicht unmittelbar in Beziehung setzen. Wenn man annimmt, daß der Bewegungszustand einer Luftmasse auf ihre Entropie keinen Einfluß hat, dann können in der Atmosphäre Entropieunterschiede nur entstehen aus den räumlichen Verschiedenheiten der Wärmeaufnahme und -Entziehung. Die thermodynamischen Wege, nach denen individuelle Luftmassen Zustandsänderungen infolge dieser äußeren Einwirkungen erfahren, sind unbekannt; ihr Erfolg, die bewirkte Entropieänderung, kommt in der allgemeinen Zustandsverteilung zum Ausdruck und die Entropieunterschiede können zu der Bewegung in unmittelbare Beziehung gebracht werden, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Zu einer zahlenmäßigen Darstellung der Entropie gelangt man mittels des I. und II. Hauptsatzes und der Vorstellung eines unendlich kleinen thermodynamischen Prozesses, dem eine M.E. trockener atmosphärischer Luft unterworfen wird. Die zugeführte unendlich kleine Wärmemenge sei dQ, infolge der Wärmezufuhr wird die innere Energie U um dU geändert und die Arbeit pdv geleistet. Nach dem I. Hauptsatz ist:

$$J \, . \, dQ = dU + pdv \tag{3}$$

Die Energieänderung dU der trockenen Luft steht mit der Temperaturänderung in Beziehung gemäß:

$$dU = Jc_v dT$$

Es bedeuten:

$c_v = 0{,}17$ die spez. Wärme bei konstantem Volumen

$J = \dfrac{R}{c_p - c_v} = 4{,}199 \; 10^7 \; cm^2 \, sec^{-2}$

$c_p = 0{,}2375$ die spez. Wärme bei konstantem Druck

$R = 2{,}876\ 10^6 \dfrac{cm^2}{sec^2}$ = Gaskonstante (in absol. Maße)

$T =$ absolute Temperatur.

Gl. 3) beiderseits mit T dividiert, gibt:

$$4) \qquad J \,.\, \frac{dQ}{T} = Jc_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T}\, dv.$$

Durch Differenzieren von $pv = RT$ erhält man:

$$p\, dv = -\frac{RTdp}{p} + RdT$$

und weiter folgt mit der leicht ableitbaren Beziehung

$$J\,(c_p - c_v) = R$$

nach Ausführung der Substitutionen aus Gl. 3) die folgende:

$$5) \qquad J \frac{dQ}{T} = Jc_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

Nach dem II. Hauptsatz stellt für alle umkehrbaren Zustandsänderungen der Quotient $\dfrac{dQ}{T}$ die Änderung einer vom Wege der Überführung unabhängigen Funktion dar, welche nach Clausius als Entropie bezeichnet wird. Es sei daher:

$$5^1 \qquad \frac{dQ}{T} = dS$$

und damit geht Gl. 5) über in:

$$6) \qquad JdS = Jc_p\, d(\lg T) \quad\ Rd(\lg p)$$

Diese Gleichung (6) gilt jedoch auch für alle nicht umkehrbaren Prozesse, nur ist bei diesen nicht mehr Gl. 5^1 erfüllt, es besteht nunmehr die Ungleichung:

$$\frac{dQ}{T} < dS$$

Es seien zwei Zustände durch die Indices (1, 2) gekennzeichnet, dann führt die Integration von (6) zwischen diesen Grenzen zu:

$$7) \qquad J\,.\,(S_2 - S_1) = (Jc_p \lg T_2 - R \lg p_2) - (Jc_p \lg T_1 - R \lg p_1)$$

Um eine für die Berechnung bequeme Form zu erhalten, erteilt man den durch (1) gekennzeichneten Werten von p und T unveränderliche Werte, z. B. $T = 1^0$ abs, $p_1 = 1$ gr. $cm^{-1}\, sec^{-2}$, es verschwindet alsdann das zweite Glied, das erste bestimmt die Entropiedifferenz einer M.E. gegen diesen nur zur Vereinfachung der Rechnung eingeführten Ausgangszustand. Die Differenz $S - S_1$ sei der Kürze

wegen im folgenden mit S bezeichnet. Im Anhang sind Tabellen der Entropie beigefügt, nebst einigen Bemerkungen über die der Rechnung zu Grunde liegenden Einheiten.

Zur Unterscheidung der Zustände in der Atmosphäre können die Parameter T und S dienen, sie werden als Funktionen des Ortes betrachtet. Alle Raumpunkte mit demselben Werte von T definieren eine Fläche, die Isothermenfläche, mit dem Parameter $T = \text{const.}$ Entsprechend den verschiedenen Temperaturen in der Atmosphäre wird die Temperaturverteilung darstellbar sein durch eine Schar von Isothermenflächen. Ihre Anordnung in der Atmosphäre läßt sich genähert aus der Temperaturverteilung der Luft an der Erdoberfläche erschließen, ich betrachte dabei die Isothermenlinien als Schnitte zwischen den zugehörigen Isothermenflächen und der Erdoberfläche. Vom Äquator nach den Polen nimmt die Temperatur ab, dasselbe findet erfahrungsgemäß mit der Höhe über dem Boden statt, daher liegen die Isothermenflächen, die in den höheren Breiten die Erdoberfläche schneiden, über dem Äquator in der Höhe, also senken sich die Isothermenflächen polwärts. Den Isothermenflächen hat man zur Vervollständigung des Bildes von der Zustandsverteilung in der Atmosphäre die Isentropenflächen hinzuzufügen. Diese haben dort jedoch eine wesentlich andere Lage als jene. Daß überhaupt Entropieunterschiede vorhanden sind, ist leicht aus der Temperaturverteilung längs der Erdoberfläche zu erschließen, den Druck daselbst als konstant betrachtet. Es folgt aus Gl. 6) für $p = \text{const.}$, daß die Entropie proportional dem lg der Temperatur zunimmt, daher wächst im allgemeinen die Entropie vom Pol nach dem Äquator. Es läßt sich weiter zeigen, daß stabiles Gleichgewicht der Luft nur mit einer nach der Höhe zu wachsenden Entropie vereinbar ist, die Atmosphäre ist aber im wesentlichen stabil geschichtet. Mit der Höhe zunehmende Parameterwerte der potentiellen Temperatur, und außerdem längs der Erdoberfläche nach dem Äquator erfordert, daß die Isentropenflächen $S = \text{const.}$ gegen die Pole zu ansteigen und bei wenig gestörter Anordnung diese überwölben. Da sowohl die Isothermen- wie die Isentropenflächen die Erdoberfläche schneiden, durchsetzen sich beide Flächenscharen gegenseitig; zwei benachbarte Isentropenflächen im Schnitt mit zwei aufeinanderfolgenden Isothermenflächen grenzen dabei einen Raumteil von röhrenförmiger Gestalt ab. Infolge der

Mannigfaltigkeit von Schnitten zwischen den beiderseitigen Flächenscharen ist die ganze Atmosphäre durchsetzt zu denken von einem System derartiger Röhren, die ich im Anschluß an eine von V. Bjerknes eingeführte Bezeichnung „Solenoide" nennen werde, die von ihm anders, nämlich durch die Schnitte zwischen den Isobarenflächen und den Flächen konstanten spezifischen Volumens (Isosterenflächen) definiert werden. Zur weiteren Vereinfachung seien die Isothermen- und Isentropenflächen nach konstanten Intervallen der bezüglichen Parameter aufeinanderfolgend gedacht, dadurch wird jedes Solenoid eingeschlossen zwischen einem konstanten Temperaturintervall (ΔT) und einer ebenfalls konstanten Entropiedifferenz (ΔS). Durch diese Festsetzung wird es möglich, von der Zahl der Solenoide zu sprechen, die z. B. eine gegebene Fläche durchsetzen. Die Solenoide schließen sich übrigens im Luftraum, oder endigen auf der Erdoberfläche.

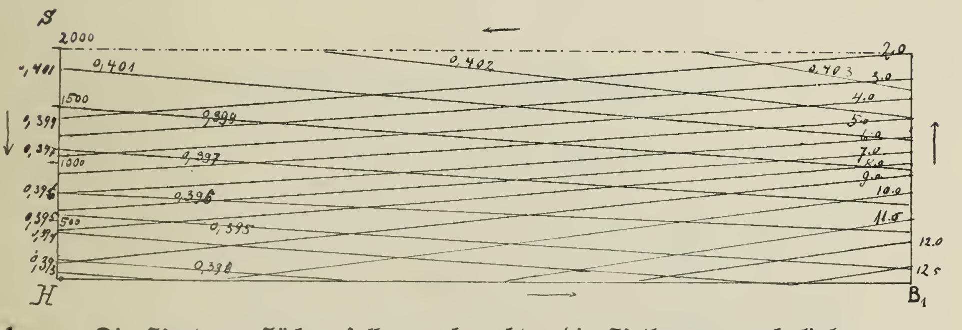
Ein Luftelement würde bei einmaligem Umlauf um ein Solenoid und umkehrbaren Zustandsänderungen längs den zugehörigen Flächen $T = \text{const.}$ und $S = \text{const.}$ nach Rückkehr in den Ausgangszustand einen Carnot'schen Kreisprozeß vollführt haben. Dabei würde, je nach der Richtung in der die Umkreisung stattfindet, Wärme in Arbeit, oder Arbeit in Wärme verwandelt. Diese Wärmemenge wird gemessen durch das Produkt $\pm \Delta T \,.\, \Delta S$ (bezogen auf die M.E.). Das positive Vorzeichen soll sich nun auf die Umkreisungsrichtung beziehen, bei der Wärme in Arbeit verwandelt wird, entsprechend dem positiven Carnotschen Kreisprozeß; die entgegengesetzte Richtung wird negativ gerechnet. Bei diesen Umlauf müßten äußere Kräfte Arbeit leisten.

Erfolgt die positive Umkreisung auf dem Rand eines Solenoidsystemes von n einzelnen, je durch ΔT und ΔS charakterisierten Solenoiden, so würde bei einem vollen Umlauf und umkehrbaren Zustandsänderungen die Arbeit $J \,.\, n \, \Delta T \,.\, \Delta S$ gewonnen. Hierin zeigt sich die wesentliche Verschiedenheit der Zustandsverteilung in der Atmosphäre gegen die in einer Flüssigkeit, deren Dichte entweder konstant, oder eine Funktion des Druckes allein ist. In einer solchen Flüssigkeit sind keine Carnotschen Prozesse möglich. Es existieren z. B. keine Solenoide in einer Atmosphäre von konstanter Temperatur oder konstanter Entropie, sie sind aber dort zu erwarten, wo Temperatur- und Entropieunterschiede vorkommen, vornehmlich in den unteren Schichten der Atmosphäre, wo die Vorgänge der Wärmeaufnahme

und -Entziehung am stärksten ausgeprägt sind. Zum Nachweis der Solenoide in der Atmosphäre ist es nicht nötig, auf die allgemeine Zustandsverteilung zurückzugehen, es genügt dazu bereits die Kenntnis der simultanen Zustandsverteilung längs einer geschlossenen, in der Atmosphäre aus Luftelementen gebildeten Kurve. Denkt man sich die längs der Kurve beobachteten Zustände in ein (TS) Diagramm übertragen, so liegen sie in diesem ebenfalls auf einer geschlossenen Kurve, die im allgemeinen Fall eine Fläche umrandet. Der Flächeninhalt in dem Diagramm wird, wenn T die Ordinaten und S die Abszissen bedeuten, gemessen durch $\oint TdS$, oder wenn der Flächeninhalt bestimmt wird, aus der Zahl n der Flächeneinheiten und diese durch das Produkt $\Delta T \,.\, \Delta S$ ausgedrückt werden, so erhält man:

$$\oint TdS = n \,.\, \Delta T \,.\, \Delta S$$

Nun bestimmt n zugleich die Zahl der Solenoide, die von der Kurve in der Atmosphäre umschlossen werden, wenn über die Intervalle ΔT, ΔS derart verfügt wird, daß der Flächeneinheit in dem Diagramm der Modul$(\Delta T \,.\, \Delta S)$ beigelegt wird, dessen Wert ein Solenoid in der Atmosphäre charakterisiert.



Die Isentropenflächen fallen nach rechts, die Isothermen nach links.

Die vorstehende Figur zeigt ein anderes Verfahren, das ebenfalls zur Kenntnis der Anzahl von Solenoiden führt, die eine Kurve mit auf ihr gegebenen Funktionswerten von T und S umschließt.

Die Figur stellt einen vertikalen Teilschnitt durch die Entropie- und Temperaturflächen einer Zyklone dar, wobei jedoch nur an zwei Orten (Lindenberg und Hald-Jütland) Drachenaufstiege zur Beobachtung der Druck- und Temperaturverteilung ausgeführt wurden. Die Aufstiege erfolgten in so kurzen zeitlichen Abständen, daß sie nahezu als simultan angesehen werden dürfen. Aus den Beobachtungsdaten über Temperatur und Druck, die der Dissertation[1]) von K. Wegener entnommen sind, wurde die Entropie bestimmt und die bezüglichen Werte nebst denen der Temperatur auf den beiden äußeren Geraden, (I, II), die als Teile einer Ringkurve anzusehen sind, der räumlichen Verteilung gemäß abgetragen und je gleiche Werte auf beiden Geraden unter sich geradlinig verbunden. Die beiden Linienscharen durchsetzen sich, die Isentropenlinien steigen, wie zu erwarten, nach der nördlichen Richtung, die Isothermen entgegengesetzt an. Ergänzt man die fehlenden Kurvenzweige und bildet dann das Ringintegral $\oint -TdS$, so erhält man dessen Wert am einfachsten aus der Anzahl der Vierecke des von den Isothermen- und Isentropenlinien gebildeten Netzes. Die Intervalle der Temperatur und Entropie haben darin je gleiche Größe, jedes einzelne Viereck enthält die Temperatur- und Entropie-Differenzen: $\Delta T = 1^0$, $\Delta S = 0{,}001$. Die Richtung des positiven Umlaufes um den Rand der Kurve ist durch die eingezeichneten Pfeile angegeben.

§ 2. Zirkulationsbeschleunigung.

Durch die Anordnung der Flächenscharen der Entropie und Temperatur in der Atmosphäre erhält die Zustandsverteilung ein bestimmtes Gepräge, dessen wesentliches Merkmal sich in der durch thermodynamische Kreisprozesse meßbaren Wärmeaufspeicherung ausdrückt. Es läßt sich daran die Frage knüpfen, ob die Atmosphäre bei einer derartigen Zustandsverteilung im Gleichgewicht verharren kann. Die Entscheidung hierüber läßt sich aus den allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichtes herleiten; wenn auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen z-Achse parallel der Vertikalen orientiert ist, bezogen, lauten diese:

[1]) Simultane Drachenaufstiege zu Lindenberg und Hald. Inaug.-Diss. von K. Wegener.

$$1)\qquad \begin{aligned} -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ -g-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

(g = Schwerebeschleunigung)

Mittels der Zustandsgleichung $p = R\varrho T$ und der S. 4 abgeleiteten Beziehung (Gl. 6) erhält man die folgende:

$$JTdS - Jc_p\,dT = -RT\frac{dp}{p} = -\frac{1}{\varrho}dp$$

Da T und p als stetige Funktionen des Ortes angenommen sind, so ist S ebenfalls eine stetige Funktion. Daher kann man setzen:

$$2)\qquad J\left(T\frac{\partial S}{\partial x} - c_p\frac{\partial T}{\partial x}\right) = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

und zwei analoge Gleichungen in (y, z).

Für den Fall des Gleichgewichtes verschwindet die rechte Seite von 2), daher lautet die Gleichgewichtsbedingung, ausgedrückt in S und T,

$$2^1\qquad \begin{aligned} &a)\quad T\frac{\partial S}{\partial x} = c_p\frac{\partial T}{\partial x} \\ &b)\quad T\frac{\partial S}{\partial y} = c_p\frac{\partial T}{\partial y} \\ &c)\quad T\frac{\partial S}{\partial z} = c_p\frac{\partial T}{\partial z} + g \end{aligned}$$

Differenziert man kreuzweise, z. B. (c) nach y, (b) nach z usw. und bildet die Differenzen, so erhält man weiter:

$$3)\qquad \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

und zwei analoge Gleichungen in (zx), (xy), die erfüllt sein müssen, damit Gleichgewicht in der Atmosphäre bestehen kann.

Das Ringintegral $\oint TdS$, gebildet für eine geschlossene Kurve, die Solenoide umschließt, kann nach dem Satz von Stokes in ein Flächenintegral verwandelt werden, dieses ist zu erstrecken über eine Fläche, welche die geschlossene Kurve zur Randlinie hat. Die Umformung ergibt, wenn $d\sigma$ ein Flächenelement und cos (nx), cos (ny), cos (nz) die Richtungs-cos seiner Normalen bedeuten,

$$\oint T dS = \iint \Big\{ \Big[\frac{\partial}{\partial y}\Big(T\frac{\partial S}{\partial z}\Big) - \frac{\partial}{\partial z}\Big(T\frac{\partial S}{\partial y}\Big)\Big] \cos(nx)$$
$$+ \Big[\frac{\partial}{\partial z}\Big(T\frac{\partial S}{\partial x}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(T\frac{\partial S}{\partial z}\Big)\Big] \cos(ny)$$
$$+ \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(T\frac{\partial S}{\partial y}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(T\frac{\partial S}{\partial x}\Big)\Big] \cos(nz) \Big\} d\sigma$$

Nach Ausführung der Differenzierung folgt:

$$4)\qquad \oint T dS = \iint \Big[\Big(\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial S}{\partial y}\Big)(\cos nx)$$
$$+ \Big(\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial z}\Big)\cos(ny)$$
$$+ \Big(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial x}\Big)\cos(nz) \Big] d\sigma$$

zur Abkürzung sei gesetzt:

$$B_x = \Big(\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial S}{\partial y}\Big)$$
$$B_y = \Big(\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial z}\Big)$$
$$B_z = \Big(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial x}\Big)$$

B_x, B_y, B_z sind als Komponenten eines Vektors B aufzufassen, der senkrecht steht auf dem Querschnitt eines Solenoides und dessen Achse parallel liegt. An Stelle von Gl. 4) erhält man mit

$$B_n = B_x \cos(nx) + B_y \cos(ny) + B_z \cos(nz)$$

die einfachere

$$5)\qquad \oint T dS = \iint B_n \, d\sigma$$

Wenn nun $\oint T dS$ einen von Null verschiedenen Wert längs einer geschlossenen Kurve besitzt, so sind auch die Komponenten B_x, B_y, B_z des Vektors B im allgemeinen von Null verschieden. Gleichgewicht in der Atmosphäre kann nach (3) aber nur bestehen, wenn B verschwindet. Hieraus folgt, daß jedenfalls kein Gleichgewicht herrschen kann in den Raumstellen, wo B von Null verschieden ist.

Drückt man $\frac{\partial T}{\partial x}$ etc., $\frac{\partial S}{\partial x}$, durch die Gradienten der Temperatur

und Entropie aus und bezeichnet ψ den Winkel zwischen diesen Gradienten, γ den Winkel zwischen der Normalen des Flächenelementes $d\sigma$ und der Normalen zu dem aus den Gradienten der Temperatur und Entropie gebildeten Parallelogrammes, so führt eine leichte Rechnung zu der folgenden Beziehung:

$$6) \qquad \oint\!\!\int B_n \, d\sigma = \oint\!\!\int (\text{grad}\, T \; \text{grad}\, S) \sin \psi \cos \gamma \, d\sigma$$

Für $\psi = 0$ verschwindet das Integral, die Gradienten der Temperatur und Entropie liegen in derselben Richtung, oder was dasselbe besagt: die Isothermen- und Isentropenflächen sind parallel. Infolge der allgemeinen Zustandsverteilung in der Atmosphäre schneiden sich diese Flächen stets, daher kann auch die Atmosphäre im Zustande der Ruhe nicht verharren. Aus der Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen ergab sich, daß unter der Wirkung der Solenoide das Gleichgewicht aufgehoben wird, es entsteht aus ihrer Wirksamkeit Bewegung, und diese hat längs einer geschlossenen Kurve die Richtung, in der das Linienintegral $\oint TdS$ bei der Umkreisung einen positiven Wert erhält. Würde ein Massenelement die Umkreisung bis zur Rückkehr in seinen Ausgangszustand wirklich ausführen und die Zustandsänderungen umkehrbar durchlaufen, so hätte es einen positiven Kreisprozeß ausgeführt, bei dem, bezogen auf die M.E., die Arbeit $J \, . \oint TdS$ gewonnen worden wäre. Es ist auch denkbar, daß die entgegengesetzte Umlaufsrichtung vorkommen kann, allein zu dieser Bewegung bedürfte es der Wirkung „äußerer Kräfte, von anderer Art als der Gravitation", die den Umlauf im Sinne des negativen Kreisprozesses erzwingen. Von den beiden genannten Prozessen ist unter den natürlichen Bedingungen in der Atmosphäre nur der erste möglich. Dies läßt sich mittels des von V. Bjerknes aufgestellten Satzes über die „Zirkulationsbeschleunigung" beweisen. Nach Lord Kelvin versteht man unter der Zirkulation die Strömung einer Flüssigkeit längs einer geschlossenen mit ihr bewegten Kurve, und es gilt der Satz von der Erhaltung der Zirkulation:

$$\oint udx + vdy + wdz = \varkappa$$

(u, v, w, Geschwindigkeitskomponenten eines bewegten Linienelementes, dessen Projektionen die Achsen dx, dy, dz sind.)

nur für Flüssigkeiten, deren Dichte entweder konstant, oder eine Funktion des Druckes allein ist. Von der Reibung wird hierbei abgesehen. V. Bjerknes hat, von den Eulerschen Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik ausgehend, den angezogenen Satz erweitert und gezeigt, daß die Zirkulation wächst, wenn die Dichte nicht eine Funktion des Druckes allein ist, und außerdem das Ringintegral $-\oint \frac{1}{\varrho}\, dp$ längs einer geschlossenen und mitbewegten Kurve einen von Null verschiedenen Wert annimmt. Die leicht ableitbare Beziehung zwischen diesem Integral und der Zirkulationsbeschleunigung lautet in der von V. Bjerknes gewählten Darstellung:

8) $$\frac{D}{Dt}\oint udx + vdy + wdz = -\oint \frac{dp}{\varrho}$$

Das Symbol $\frac{D}{Dt}$ bedeutet nach Stokes den substantiellen Differentialquotienten.

Um die Bedeutung der rechten Seite von Gl. 8) besser hervortreten zu lassen, will ich es in eine andere Form umwandeln und benutze dazu die Zustandsgleichung:

$$pv = RT \qquad \left(v = \frac{1}{\varrho} = \text{spez. Volumen}\right)$$

Differenziert man, so ergibt sich die identische Beziehung:

$$-\frac{dp}{\varrho} = pdv - RdT$$

und das Linienintegral über die Zustandsverteilung längs einer Kurve lautet:

9) $$-\oint \frac{dp}{\varrho} = \oint pdv - R\underbrace{\oint dT}_{0}$$

Das letzte Integral ist jedoch Null für jeden geschlossenen Integrationsweg, da T eine eindeutige Funktion des Ortes ist. $\oint pdv$ dagegen bedeutet die Arbeit, welche die M.E. bei einem positiven und umkehrbaren Umlauf durch die Zustände längs der Kurve gewinnen würde. An Stelle von p und v kann man die Parameter T und S einführen, und erhält alsdann:

10) $$\frac{D}{Dt}\oint udx + vdy + wdz = J\oint TdS$$

und diese Beziehung zeigt, daß die Zirkulationsbeschleunigung in der Richtung wirkt, in der bei einem Umlauf das rechtsseitige Integral von 10) den positiven Wert erhält. Diese Umlaufsrichtung ist aber identisch mit der eines positiven Kreisprozesses, bei dem Wärme in Arbeit verwandelt wird. Man kann daher unter $\oint TdS$ die längs der substanziellen Kurve in der Atmosphäre vorhandene, zur Arbeitsleistung disponible Wärme verstehen. Im konkreten Falle läßt sich aus der Anordnung der Isentropen- und Isothermenflächen leicht die Richtung erschließen, in der die Zirkulationsbeschleunigung wirksam ist. Auf seiten der höheren Temperatur, die zwei Isentropen verbindet, wirkt die Beschleunigung in der Richtung der wachsenden Entropiewerte, auf seiten der tieferen Temperatur dagegen umgekehrt.

Die Theorie gilt ganz allgemein, nicht nur für gasförmige, sondern auch für tropfbar flüssige Medien, wobei an Stelle des speziellen Ausdruckes $\int TdS$ das allgemeinere Integral $-\int \frac{dp}{\varrho}$ tritt.

§ 3. Darstellung des Feldes der Solenoid-Beschleunigung.

Es sei angenommen, daß die Zustandsverteilung in der Atmosphäre für einen Augenblick bekannt sei; dann läßt sich für jeden Raumpunkt aus den bekannten Werten von ϱ und p die Beschleunigung: $\frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p$ bilden.

1. Vermöge der Beziehung zwischen den Zustandsparametern p, ϱ und TS gilt auch:

$$1) \qquad -\frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p = J\,(T \operatorname{grad} S - c_p \operatorname{grad} T)$$

Die gesamte Beschleunigung setzt sich aus diesem Anteil (Gl. 1) und der Schwerebeschleunigung zusammen. Die aus den Zustandsverschiedenheiten hervorgehende Beschleunigung, als Vektor aufgefaßt, sei mit A bezeichnet, und definiert durch:

$$2) \qquad A = \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p = -J\,(T \operatorname{grad} S - c_p \operatorname{grad} T)$$

mit den Komponenten:

$$A_x = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = J\,T\frac{\partial S}{\partial x} - J\,c_p\frac{\partial T}{\partial x}$$

entsprechend A_y und A_z.

Bildet man rot A und setzt:

3) $$B = \operatorname{rot} A$$

oder in den Komponenten ausgedrückt:

$$B_x = \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \text{ usw.}$$

so folgt aus 2) und 3) durch Ausführung der Operation rot.

3¹ $$\begin{aligned} B_x &= J\left(\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial S}{\partial y}\right) = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ B_y &= J\left(\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial z}\right) = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ B_z &= J\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial x}\right) = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned}$$

Die rechte Seite von 3) und 3¹ verschwindet im allgemeinen nicht, wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde. Es kann daher A nicht der Gradient eines skalaren Potentiales sein, nimmt man jedoch ein Vektorpotential hinzu, so kann der Vektor A zusammengesetzt werden aus den Gradienten von skalaren Potentialen und der Rotation eines Vektorpotentiales: Die Summe der skalaren Potentiale sei mit Φ, das Vektorpotential mit C bezeichnet, seine Komponenten seien L, M, N.

A sei nun bestimmt durch:

4) $$A = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot} C$$

dabei werde C die stets erfüllbare Bedingung auferlegt:

$$\operatorname{div} C = 0$$

oder $$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$$

Der Vektor B war definiert durch:

$$B = \operatorname{rot} A$$

Wendet man die Operation rot auf Gl. 4) an, so folgt:

5) $$B = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\,\operatorname{rot} C$$

Es ist nun stets:

$$\text{rot grad } \Phi = 0$$

und für rot rot C erhält man die Beziehung:

$$\text{rot rot C} = \text{grad div C} - \Delta \text{C}$$

wobei Δ den Operator: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ bedeutet.

Infolge der Bedingung div C = 0 ist B mit C verbunden durch:

6) $$B = -\Delta C$$

in den Komponenten ausgedrückt, wird:

6[1]
$$\begin{aligned} B_x &= -\Delta L \\ B_y &= -\Delta M \\ B_z &= -\Delta N \end{aligned}$$

Bildet man von 3 und 4, die Divergenz, so ergibt sich:

$$\text{div B} = 0$$

7) aus 4) $$\text{div A} = \text{div grad } \Phi$$

Es ist nun $\text{div grad } \Phi = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) = \Delta \Phi$; wobei der Wert von $\Delta \Phi = \Theta$ bestimmt wird aus:

8) $$\text{div}\left(\frac{1}{\varrho} \text{ grad p}\right) = \Theta$$

Unter der Annahme, daß für unbegrenzt wachsende Koordinaten die Größen:

9) $$R^3 B_x, R^3 B_y, R^3 B_z, R^3 \Theta \quad R^2 = (x^2 + y^2 + z^2)$$

nicht unendlich groß werden, erhält man als partikulare Lösungen die Differentialgleichungen: (6, 7), im unbegrenzten Raum und bei Abwesenheit von Unstetigkeiten:

10)
$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{B_x}{r} d\tau \\ M &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{B_y}{r} d\tau \\ N &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{B_z}{r} d\tau \end{aligned}$$

Die Integrationen sind zu erstrecken über alle Raumelemente, in denen B_x, B_y, B_z, Θ von Null verschieden sind. Zwecks späterer Anwendung betrachte ich den Fall, daß ein einzelnes Solenoid in der Atmosphäre vorhanden ist; im ganzen Raum soll Θ verschwinden.

Nach Gl. [5) § 2] kann B gefunden werden aus

$$J \oint TdS = \iint B_n d\sigma$$

Das Linienintegral wird passend erstreckt über den Rand eines Querschnittes senkrecht zur Achse des Solenoides; $d\sigma$ bedeutet ein Flächenelement des Querschnittes, ist dieser sehr klein, so darf der Mittelwert von B auf diesen genommen werden, anders ausgedrückt durch:

11) $$\iint B_n d\sigma = B \, . \, q$$ (q ist die Querschnittsfläche)

Da nun der Wert von $J \oint TdS$ für alle Querschnitte desselben Solenoides unverändert bleibt, erhält man für zwei verschieden große Querschnitte q und q^1 als Beziehung zwischen den zugehörigen Vektoren B und B^1 die Gleichung:

12) $$Bq = B^1 q^1 = \text{const.}$$

Ein Volumenelement $d\tau$ eines Solenoides ist durch den Querschnitt q und ein Linienelement ds der Solenoidachse ausdrückbar,

$$d\tau = q \, . \, ds$$

Es sei ferner:

13) $$B_x = B \frac{dx}{ds}$$
$$B_y = B \frac{dy}{ds}$$
$$B_z = B \frac{dz}{ds}$$

wobei $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ die Richtungs-cos von B bezüglich der Koordinatenachsen darstellen.

Aus Gl. 10) folgt mit Benutzung obiger Beziehungen (13):

14) $$L = \frac{Bq}{4\pi} \int \frac{dx}{r}$$
$$M = \frac{Bq}{4\pi} \int \frac{dy}{r}$$
$$N = \frac{Bq}{4\pi} \int \frac{dz}{r}$$

wobei:

$$Bq = J \oint TdS$$

Die Koordinaten eines Punktes außerhalb des Solenoides seien x, y, z; r sein Abstand von einem Linienelement ds der Achse des Solenoides.

Durch Anwendung der Operation rot auf 14) erhält man die Komponenten von A im Aufpunkte, da Θ im ganzen Raum nach Annahme verschwinden soll, sie lauten:

$$
\begin{aligned}
A_x &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = + \frac{Bq}{4\pi} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \frac{dc}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} \frac{db}{ds} \right) \frac{ds}{r^2} \\
15) \quad A_y &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = + \frac{Bq}{4\pi} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} \frac{da}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \frac{dc}{ds} \right) \frac{ds}{r^2} \\
A_z &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = + \frac{Bq}{4\pi} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} \frac{db}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} \frac{da}{ds} \right) \frac{ds}{r^2}
\end{aligned}
$$

$r^2 = (a^2 - x^2) + (b^2 - y^2) + (c^2 - z^2)$, a, b, c ein Punkt auf der Achse des Solenoides, x, y, z Koordinaten des Aufpunktes.

Infolge der Beziehung:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} \text{ etc.}$$

erhalten die obigen Integrale das positive Vorzeichen.

Die Beschleunigung, die ein Element qds des Solenoides in dem Aufpunkt bewirkt, sei mit δA bezeichnet, wobei δA definiert ist durch:

$$\delta A = \sqrt{(\delta A_x)^2 + (\delta A_y)^2 + (\delta A_z)^2}$$

Die Auswertung von 15) ergibt zunächst:

$$16) \quad \partial A^2 = \left(\frac{Bq}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \right)^2 \left\{ \left(\frac{z-c}{r} \frac{db}{ds} - \frac{(y-b)}{r} \frac{dc}{ds} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{x-a}{r} \frac{dc}{ds} - \frac{z-c}{r} \frac{da}{ds} \right)^2 + \left(\frac{y-b}{r} \frac{da}{ds} - \frac{x-a}{r} \frac{db}{ds} \right)^2 \right\}$$

Der Ausdruck unter der Klammer ist das Quadrat des sin des Winkels, den das Linienelement δs der Solenoidachse mit

dem Radiusvektor nach dem Aufpunkt einschließt. Bezeichnet ε diesen Winkel, so lautet Gl. 16) in vereinfachter Schreibweise:

$$\delta A = \frac{Bq}{4\pi} \sin \varepsilon \frac{\delta s}{r^2} \tag{17}$$

Die an das Biot-Savarsche Gesetz erinnernde Gl. 17) gestattet, den Teilbeitrag der von einem Solenoidelement in einem äußeren Punkte hervorgerufenen Beschleunigung zu berechnen. δA ist ein zu der Ebene durch δs und den Radiusvektor r senkrechter Vektor, dessen Größe und Richtung die Beschleunigung mißt. Um ihren Gesamtwert, entsprechend der Wirkung des ganzen Solenoides, zu erhalten, wäre die Integration längs der Achse desselben auszuführen. Ist z. B. die Achse des Solenoides ein Kreis, sein Mittelpunkt zugleich der Aufpunkt, so ergibt sich die gesamte von dem Solenoid dort bewirkte Beschleunigung zu:

$$A = \frac{Bq}{4\pi R}$$

Erwähnt sei, daß A für äußere Punkte aus einem skalaren Potential abgeleitet werden kann, es sei dieses mit χ bezeichnet. Nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie läßt sich dasselbe darstellen durch:

$$\chi = \frac{Bq}{4\pi} \iint \frac{\cos \omega}{r^2} d\sigma$$

worin ω den Öffnungswinkel des Sehkegels bedeutet, unter dem ein Element der von der Solenoidachse begrenzten Fläche vom Aufpunkte aus gesehen wird.

Zur Darstellung eines allgemeineren Falles, z. B. der Wirkung mehrerer Solenoide bei Anwesenheit von festen Begrenzungen, ist es vorteilhafter, von den Vektorpotentialen gemäß Gl. 14) auszugehen. Hier möge zunächst ein einfacher Fall als Beispiel behandelt werden. Die Solenoidachse sei geradlinig und parallel der x-Achse des Koordinatensystems gestreckt. Infolgedessen sind $B_y = B_z = 0$, ebenso die Komponenten M, N des Vektorpotentiales, dagegen ist:

$$B = B_x = -\Delta L$$

Denkt man sich eine Zylinderfläche vom Radius r koaxial zu der Solenoidachse und wendet auf den so begrenzten Raum den Gaußschen Satz bezüglich ΔL an, so folgt hiermit:

$$-\iiint \Delta L \, d\tau = \iint \frac{dL}{dn} d\sigma$$

oder mit Einführung von Zylinderkoordinaten r, φ, x und mit B_x an Stelle von $-\Delta L$:

18) $$\iiint B_x \, r d\varphi . dr . dx. = + \iint \frac{dL}{dr} . r . d\varphi . dx$$

Die räumliche Integration ist nur über das Gebiet, in dem B_x vorhanden ist, auszuführen. Bei kleinem Solenoidquerschnitt q erhält man aus 18):

19) $$\int B_x . q . dx = + 2\pi r \int \frac{dL}{dr} dx$$

wobei das rechtsseitige Integral ausgedehnt ist über den Umfang einer Kreisscheibe vom Radius r und der Höhe x. Das Produkt $B_x q$ hat für alle Querschnitte der Solenoidröhre denselben Wert, daher folgt aus Gl. 19):

20) $$Bq = + 2\pi r \frac{dL}{dr}$$

oder:

21) $$L = + \frac{Bq}{2\pi} \lg r + \alpha$$

Die irrelevante Konstante α in dem Ausdruck für L läßt sich beseitigen, indem man L im Abstand 1 von der Zylinderachse den Wert Null erteilt. L = const. gesetzt, definiert eine Niveaufläche, sie ist eine Zylinderfläche; indem man L verschiedene Werte erteilt, erhält man eine Schar von Niveauflächen.

Die Beschleunigung A ergibt sich aus Gl. 15) mit:

$$A_x = 0$$

$$A_y = \frac{\partial L}{\partial z}$$

$$A_z = -\frac{\partial L}{\partial y}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2} = \frac{dL}{dr}$$

In Verbindung mit 20) folgt daher als Beschleunigung:

22) $$A = \frac{Bq}{2\pi r}$$

Da Schnittebenen, senkrecht zur Zylinderachse gelegt, die Niveauflächen von L in konzentrischen Kreisen schneiden und A senkrecht steht auf einer durch die Solenoidachse und den Radiusvektor nach dem Aufpunkt gehenden Ebene, so dienen die Linien L = const. in

den Schnittebenen zur Veranschaulichung der Lage und Verteilung von $A = \text{const.}$ Unter den speziellen Voraussetzungen, die dem voranstehenden Beispiele zu Grunde gelegt wurden, folgt, daß die Beschleunigung umgekehrt proportional der Entfernung abnimmt. Sind mehrere parallel und getrennt liegende Solenoide von im Verhältnis zu den Abständen nach einem Aufpunkt kleinen Querschnitten vorhanden, so kann das resultierende Potential $L = L_1 + L_2 + ..$ durch Addition der für jedes einzelne Solenoid gemäß Gl. 21) gebildeten Potentiale erhalten werden, wobei entgegengesetzte Richtungen der Vektoren B durch entsprechende Vorzeichen der Potentiale auszudrücken sind. Demnach lautet das resultierende Potential L von zwei parallelen geradlinigen Solenoiden mit gleichem, aber entgegengesetzt gerichteten Vektorfluß:

$$L = \frac{Bq}{2\pi}(\lg r_2 - \lg r_1) = \frac{Bq}{2\pi} \lg \frac{r_2}{r_1}$$

wobei r_1 und r_2 die Abstände des Aufpunktes von den Solenoidachsen in einer dazu senkrechten Ebene bedeuten. Da für $L = \text{const.}$

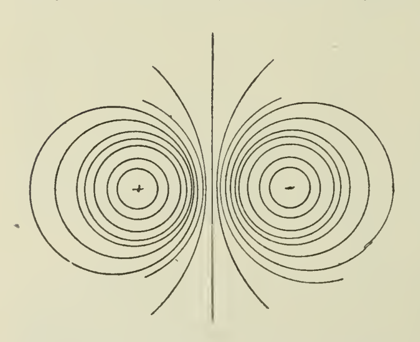
$$\frac{\partial L}{\partial y} dy + \frac{\partial L}{\partial z} dz = 0$$

so ist, wiederum $M = 0$, $N = 0$ gesetzt, wegen:

$$A_z = -\frac{\partial L}{\partial y} \qquad A_y = +\frac{\partial L}{\partial z}$$

$$A_z\, dy - A_y\, dz = 0$$

Daraus geht hervor, daß auf jeder Niveaufläche $L = \text{const.}$, auch $A = \text{const.}$ ist, und die Schnittlinien der yz-Ebene mit der Schar der Niveauflächen geben daher den Verlauf der Kraftlinien an. Im vorstehenden Beispiel sind sie durch die Krise $\frac{r_2}{r_1} = \text{const.}$ dargestellt. Ihren Verlauf zeigt beistehende Figur.



Das Auftreten der Symmetrielinie, räumlich als Symmetrieebene gedeutet, zwischen den beiden Solenoiden mit entgegengesetztem Vektorfluß drückt zugleich ihre auf gegenseitige Trennung gerichtete Wirksamkeit aus. Beide Solenoide ver-

halten sich so, wie wenn sie durch eine starre Wand getrennt wären. Offenbar läßt sich danach der Einfluß einer starren ebenen Begrenzungsfläche auf die Solenoide und ihr Feld durch Annahme spiegelbildlicher Solenoide jenseits derselben in Rechnung setzen. Dieser Fall erhält allgemeinere Bedeutung dadurch, daß die Solenoide in der Atmosphäre überwiegend horizontal ausgedehnt sind, und kaum mehr als eine geringfügige Neigung gegen die Erdoberfläche haben, zudem befinden sie sich in den unteren atmosphärischen Schichten, also dem Erdboden verhältnismäßig nahe; umsomehr muß der Einfluß dieser Grenzfläche auf die Anordnung des Feldes der Solenoid-Beschleunigung berücksichtigt werden. Das voranstehende Beispiel zweier isolierter Solenoide wurde zum Zweck der Veranschaulichung ihrer Wechselwirkung und der Darstellung des Einflusses einer festen Begrenzung gewählt, bei den wirklichen Verhältnissen in der Atmosphäre handelt es sich um weit kompliziertere Fälle, die durch eine einfache Analyse nicht zu beherrschen sind. Man wird hier mit verschiedenen Solenoidsystemen zu rechnen haben, die teils untereinander zusammenhängen, in verschiedener räumlicher Gruppierung auftreten und ungleiche Intensität besitzen können. Dabei ist die Möglichkeit der Ausbildung innerer Trennungsflächen nach Analogie mit dem behandelten einfachen Beispiel nicht von der Hand zu weisen, damit würde die Frage nach der Stabilität solcher Trennungsflächen akut werden. Wahrscheinlich ist, daß die instabilen Trennungsflächen zwischen mehreren Solenoidsystemen nur kurzen Bestand haben.

Den im Luftraum sich schließenden Solenoiden stehen noch andere zur Seite, die auf der Erdoberfläche endigen. Um sie analytischer Behandlung zugänglich zu machen, hat man sie als geschlossen vorzustellen, den oberhalb der Grenzfläche liegenden Teil des Solenoides schließt ein gedachtes jenseits derselben, das Beschleunigungsfeld und die Bewegung verhalten sich so, wie wenn sie aus der Wirkung eines derart geschlossenen Solenoides hervorgebracht würden.

Der Darstellung des Feldes der Solenoid-Beschleunigung lag die Annahme einer bekannten, d. h. aus Beobachtungen gegebenen Zustandsverteilung der Parameter p, ϱ, oder T, S, zu Grunde. Infolge der erzeugten Beschleunigung und Bewegung ändert sich die Verteilung der Zustandsparameter, hinzu tritt noch der Einfluß der Wärmezufuhr von und der Wärmeabgabe nach außen, daher besitzt die aus den Solenoiden ermittelte Lage der Beschleunigungsvektoren,

kurz, ihr Kraftfeld nur Gültigkeit für den Zeitpunkt, auf den eine gegebene Zustandsverteilung sich bezieht. Indessen ist damit nur ein Teil des Beschleunigungsfeldes erörtert, der zweite, in seiner Bedeutung wahrscheinlich gegen den ersten zurücktretende Teil, entsteht aus der Wirkung des skalaren Potentiales Φ, bestimmt durch:

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p\right) = \Delta\,\Phi$$

Die aus einer Divergenz von $\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p$ resultierende Bewegung hat einen verschiedenen Charakter von der durch Solenoide bewirkten, worauf bereits das skalare Potential hinweist. Weitere Einsicht hierüber vermitteln die Eulerschen Bewegungsgleichungen, sie lauten:

$$\text{23)}\qquad \begin{aligned} \frac{Du}{dt} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{Dv}{dt} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{Dw}{dt} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned}$$

wobei das Symbol $\frac{D}{dt}$ den bereits benützten substantiellen Differentialquotienten $\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$ bedeutet.

Differenziert man Gl. 23) nach x, bezüglich y, und z, und addiert, so folgt mit Vernachlässigung der Produkte von der Form: $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$, etc. die Beziehung:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &+ v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + w\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &- \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right\} \end{aligned}$$

oder mit Benützung des Symboles $\frac{D}{dt}$:

$$\text{24)}\qquad \frac{D}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p\right)$$

Eine weitere Bedingung ist durch die Kontinuitätsgleichung

25) $$-\frac{1}{\varrho}\frac{D\varrho}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

gegeben. Wenn die Dichteänderungen sehr klein sind, so kann gesetzt werden:

26) $$\varrho = \varrho_0 (1 + s)$$

Wird dann das Produkt $s\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$ als klein von zweiter Ordnung angesehen und vernachlässigt, so geht Gl. 25) über in:

27) $$-\frac{Ds}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Die Darstellung von $\frac{1}{\varrho}$ grad p durch den Gradienten eines skalaren Potentiales erfordert, daß das Linienintegral $\oint \frac{dp}{\varrho}$ für einen geschlossenen Integrationsweg verschwindet. In diesem Falle ist jedoch die Dichte ϱ eine Funktion des Druckes allein, womit sich eine Vereinfachung des Ausdruckes für div $\left(\frac{1}{\varrho} \text{ grad } p\right)$ erzielen läßt, da nunmehr die Beziehung gilt:

28) $$\frac{1}{\varrho} \text{ grad } p = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \varrho} \text{ grad } \varrho$$

Berücksichtigt man, daß $\frac{\partial p}{\partial \varrho} = c^2$ (c = Schallgeschwindigkeit), so führt die Annahme sehr kleiner Dichteänderungen mit $\varrho = \varrho_0 (1 + s)$ zu der einfacheren Gleichung:

29) $$\text{div}\left(\frac{1}{\varrho} \text{ grad } p\right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right)$$

welche in Verbindung mit Gl. 24) und bei Annahme sehr kleiner Bewegungen die bekannte Differentialgleichung der Ausbreitung einer lokalen Dichtestörung ergibt, sie lautet:

30) $$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right)$$

Die über großen Gebieten in der Atmosphäre, z. B. in den Hoch- und Tiefdruckgebieten sich abspielenden Vorgänge der Kompression und

Dilatation treten in Begleitung von Luftströmungen auf und sind daher mit dem Bewegungsvorgang eng verbunden. Selbst wenn man sich auf kleine Änderungen der Dichte beschränkt, ist Gl. 30 auf diese Fälle nicht mehr anwendbar, weil die Bewegung nicht mehr als sehr klein anzunehmen ist. Die langsame Ausbildung wie der zeitliche Verlauf größerer atmosphärischer Störungen läßt vermuten, daß die zweite Derivierte der Kondensation s nach der Zeit: $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ sehr kleine Werte annimmt und an Bedeutung weit gegen die im Gefolge des Transportes von Luftmassen auftretenden Dehnungen und Verdichtungen zurücktritt. Aus dem Vergleich der Druck- und Temperaturverteilung in Luftströmungen längs der Erdoberfläche läßt sich die Art der begleitenden Dilatations- und Kompressionsvorgänge in vielen Fällen erschließen, und ihr Auftreten weist darauf hin, daß zur Darstellung der Zustandsverteilung in der Atmosphäre die Hinzunahme skalarer Potentiale zu den Wirbelfunktionen notwendig ist.

Eine andere, mitunter besser geeignete Darstellung der Bewegung in Verbindung mit der Zustandsverteilung ergibt sich, wenn man auch das Geschwindigkeitsfeld in zwei Anteile zerlegt, von denen einer aus einem Geschwindigkeitspotential, der zweite aus Wirbelfunktionen herleitbar ist.

Benutzt man dazu die sog. Clebsche Transformation und setzt dieser entsprechend:

$$
31) \qquad
\begin{aligned}
u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial x} \\
v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial y} \\
w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial z}
\end{aligned}
$$

λ und μ sind Funktionen von x, y, z; $\lambda = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$ bedeuten also zwei Flächen, und die Wertefolge von λ und μ kennzeichnet zwei Flächenscharen, deren gegenseitige Schnitte Wirbellinien sind. Die Kontinuitätsgleichung lautet nunmehr

$$
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)
$$

demgemäß ist:

$$
\lambda\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0
$$

Ferner werden die Rotationen $\xi, \eta \zeta$ dargestellt durch:

32)
$$2\xi = \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z} - \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial y}$$
$$2\eta = \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial z}$$
$$2\zeta = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

Diese Gleichungen sind ähnlich zusammengesetzt wie die Gl. 3[1]) pag. 14 und legen eine gewisse Verwandtschaft mit den entsprechenden Wirbelfunktionen der Zustandsverteilung nahe. In der Tat führt Gl. 31) in dem Linienintegral der Geschwindigkeit über eine geschlossene mitbewegte Linie zu der Beziehung:

33)
$$\oint u dx + v dy + w dz = \oint \lambda d\mu$$

Aus gleichem Grunde gilt auch die Erweiterung:

34)
$$\frac{D}{dt}\oint u dx + v dy + w dz = \frac{D}{dt}\oint \lambda d\mu = J \oint T dS$$

Wirbelbeschleunigungen sind jedoch nur dort vorhanden, wo die Flächen T und S einander gegenseitig schneiden. Die Schnitte zwischen den durch λ und μ gegebenen Flächenscharen repräsentieren aber Wirbellinien, welche nur dort entstehen konnten, wo die T, S- Flächen sich durchdringen. Im Anfangsstadium müssen diese jedenfalls mit den Flächenscharen λ, μ zusammenfallen, während im weiteren Verlauf der Wert von $\oint T ds$ für dieselbe Kurve abnehmen wird infolge des parallel gehenden Anwachsens der Zirkulation. Setzt man daher näherungsweise die zeitliche Abnahme des Wertes von $\oint T dS$ für eine individuelle Kurve dem Momentanwert proportional;

35)
$$\frac{D}{dt}\oint T dS = \gamma \oint T dS$$

woraus durch Integration sich ergibt:

36)
$$\oint T dS = \left(\oint T_0 dS_0\right) . e^{-\gamma t}$$

und hiermit folgt für das Anwachsen der Zirkulation die Beziehung:

$$\frac{D}{dt}\int \lambda d\mu = J \oint T_0 dS_0 \cdot e^{-\gamma t}$$

oder mit

$$\oint \lambda d\mu = \varkappa$$

und nach Integration:

$$\varkappa - \varkappa_0 = \frac{J}{\gamma}\left(\oint T_0 dS_0\right)\ (1 - e^{-\gamma t}) \tag{37}$$

Nimmt man als anfänglichen Zustand den wirbelfreien, so zeigt die obige Gleichung, daß trotz des Vorhandenseins einer Zirkulationsbeschleunigung die Zirkulation selbst einem endlichen Grenzwert entgegenstrebt, der durch die Anfangsbedingungen, den thermodynamischen Arbeitsvorrat $J \oint T_0 dS_0$ gegeben ist. Nach Ablauf einer längeren Zeit ist dieser gemäß Gl. 36) in dem System nicht mehr vorhanden, wohl aber ein Äquivalent, Wirbel. Die Zustandsverteilung im Endzustand unterscheidet sich von der ursprünglichen dadurch, daß die Flächen T und S = const. entweder parallel liegen, oder alle Entropieunterschiede durch Mischung der Luftmassen ausgeglichen sind. Die Luft befände sich in Bewegung und wäre im Falle der vorangehenden Mischung durchaus isentrop, ein Fall, der in der Atmosphäre durch die Vorgänge der Wärmezufuhr und -abgabe von und nach der Außenwelt nie eintreten kann.

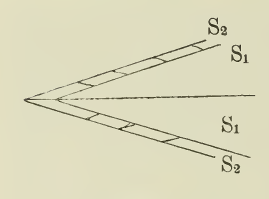
§ 4. Über den Nachweis der Wirbelbeschleunigung in atmosphärischen Störungen.

Die Kenntnis der Zustandsverteilung längs einer geschlossenen Kurve in der Atmosphäre für einen gegebenen Zeitpunkt genügt zur Feststellung, ob Wirbelbeschleunigungen in dem von der Kurve umschlossenen Gebiet vorhanden sind oder nicht. Indessen ist hiermit für die Erschließung der Bewegungsvorgänge in der Atmosphäre noch nicht viel gewonnen; unbefriedigt bleibt das Bedürfnis, zwischen der Ursache und den Folgeerscheinungen, der Form und Stärke der Luftbewegungen, einen sicheren Zusammenhang zu erkennen. Eine Übersicht

über die Zustandsverteilung in einem größeren Teil der Atmosphäre würde zu der Kenntnis der Anordnung der Solenoide führen und sich für die Beurteilung ihrer Wirksamkeit besser eignen als dies aus einer die Solenoide vielleicht nur teilweise umschlingenden Kurve möglich wäre. Gerade durch den Umstand, daß die die Luftströmungen unterhaltenden Beschleunigungen im Innern des Mediums selbst ihren Sitz haben, unterscheiden sich die Probleme der atmosphärischen Bewegungen von denen der Hydrodynamik, die hauptsächlich Bewegungsvorgänge unter der Einwirkung äußerer Einwirkungen behandelt; und die Unkenntnis der Anordnung und Verteilung des Feldes der Wirbelbeschleunigungen in der Atmosphäre ist eines der Hemmnisse, die Theorie durch die Erfahrung zu kontrollieren. Zu der Vereinfachung des Bildes der Zustandsverteilung gab die Einführung zweier Flächenscharen Anlaß, und besonders übersichtlich gestaltet es sich in der Anordnung der Isothermen und Isentropenflächen, da diese sich stets von entgegengesetzter Seite her durchdringen müßen, indem die ersten den Äquator, die zweiten die Pole überwölben. Beide Flächenscharen schneiden außerdem noch zum großen Teile die Erdoberfläche, und damit steht uns ein Hülfsmittel zur Verfügung, das auf die ungefähre Anordnung der Solenoide in der Atmosphäre Rückschlüsse zu ziehen erlaubt, indem die Form und Gruppierung der Schnittlinien jener Flächen auf der Erdoberfläche in vielen einzelnen Fällen aus einem umfangreichen Beobachtungsmaterial hergeleitet und durch die im voraus, wenigstens der Richtung nach, bekannte Fortsetzung der Flächen im Raum auch die Verteilung des Feldes der Wirbelbeschleunigung erschlossen werden kann. Die Deutung der Beobachtungsergebnisse ist jedoch wesentlich abhängig von der besonderen Vorstellung über die Wirkungsweise der Solenoide, die in verschiedener Weise sich äußern kann, je nachdem sie in geschlossenen Schichten, oder mehr in der Form von ringförmigen Gebilden auftreten. Diese beiden Arten der Anordnung mögen bezüglich der zugehörigen Luftbewegungen an einigen Beispielen näher besprochen werden.

Versteht man unter homogenen Luftmassen solche mit gleichem Wert der Entropie, dann ergibt sich als einfachster Fall einer schichtförmigen Anordnung der Solenoide der zweier je-für sich homogenen Luftmassen, die mit einer Übergangszone aneinandergrenzen, in der, unter den natürlichen Verhältnissen der Temperturverteilung, Solenoide vorhanden sind.

Als Grenzflächen im Luftraum sind die Isentropenflächen anzusehen, sie mögen die Erdoberfläche schneiden. Diese sowohl wie die Isothermen- und Isentropenflächen innerhalb des betrachteten Teiles der Atmosphäre werden als Ebenen betrachtet, von denen die beiden kalorischen Flächen einander parallel sein mögen. Die Schnitte mit der Erdoberfläche sind dann gerade Linien und in jeder dazü senkrechten Schnittebene bilden sich die kalorischen Flächen als Gerade ab. Wenn die Bewegung bei dieser Anordnung der Solenoide untersucht werden soll, so muß in erster Linie auf den Einfluß der Grenzfläche Rücksicht genommen werden. Dies geschieht geeigneterweise dadurch, daß man sich jenseits der starren Grenzfläche eine zweite Anordnung von Solenoiden in einem gleichartig beschaffenen Medium vorstellt, die spiegelbildlich zu der ersten liegt, wobei dem Vektorfluß Bq in dem zweiten System von Solenoiden die entgegengesetzte Richtung zu dem im ersten erteilt wird. Beide Solenoidsysteme zusammen haben die Form einer zwischen zwei parallelen Keilflächen eingeschlossenen ebenen Schicht, wobei die Keilhälften diesseits und jenseits der Grenzfläche in dieser gemeinschaftliche Kanten haben. Nebenstehende Figur zeigt im Querschnitt einen Teil eines derartigen, durch ein Hülfssystem von Solenoiden vervollständigten Keiles. S_1, S_2 bezeichnen die Isentropenflächen, wobei $S_2 > S_1$.



Infolge von $S_2 > S_1$ ist die Beschleunigung im Gebiet mit der höheren Entropie S_2 aufwärts, vornehmlich der Keilfläche (S_2) entlang gerichtet, im Gebiet mit der Entropie S_1 wird die Luft abwärts und überwiegend nach der Keilkante beschleunigt.

Der Stärke der Luftbewegung entsprechend sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1) geringe Beschleunigung, die Luft kann von dem Gebiet S_1 nach S_2 überströmen, ohne daß der Keil sich bewegt. Die von S_1 nach S_2 überströmende Luft muß hierbei Wärme aufnehmen. 2) Wird dagegen die Wärme nicht aufgenommen und ist die Beschleunigung stark genug, um die Bewegung der Luftmasse zu erzwingen, dann bewegt sich der ganze Keil vorwärts in der Richtung senkrecht zu seiner Kante. Die Luft von der höheren Entropie S_2 wird nach außen abgedrängt und ersetzt durch die dem Keil nachströmenden Luftmassen von der niederen Entropie S_1; ihre Ge-

schwindigkeit ist hierbei größer als die der verdrängten Luftmassen, da die Translationsgeschwindigkeit des Keiles sich zu der der Luftmassen in S_1 addiert, während die Geschwindigkeit der auf der Vorderseite emporströmenden Luftmassen aus gleichem Grunde verkleinert wird. Passiert ein solcher Keil über einen Ort hinweg, so wird anfänglich, vor dem Eintreffen seiner Kante, eine schwache Luftströmung wahrzunehmen sein, die beim Vorübergang der Keilkante fast unvermittelt durch eine starke Strömung abgelöst wird. Atmosphärische Vorgänge, deren Äußerungen ganz im Einklang mit dem skizzierten Verlauf zu stehen scheinen, dürften z. B. die Linienböen sein; in noch größerem Maßstabe aber treten sie auf in den sogenannten Rückseitenphänomenen von Zyklonen, in dem Einbruch kalter Luftmassen auf den westlichen Seiten der Minima.

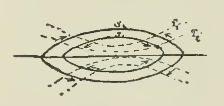
Da die den Keil begrenzenden Isentropenflächen die Erdoberfläche schneiden, so kann die Existenz eines Keiles und seine Bewegung durch die Lage und Veränderung der Entropielinien auf der Erdoberfläche nachgewiesen werden.

Faßt man die Solenoide als schichtförmig verteilt auf, so ist die Bewegung zu beiden Seiten der Übergangszone eine unstetige. Wie von Helmholtz gezeigt hat, wird eine Diskontinuitätsfläche infolge darübergelagerter Störungen wellenförmig deformiert, an den Knotenstellen bilden sich neue Wirbel aus. In dem vorliegenden Beispiele würde die Übergangszone in den Knotenstellen spiralförmig deformiert werden, wobei wahrscheinlich intensive Mischungsvorgänge sich abspielen. Vermutlich stehen die Böen, die auf der Rückseite der Zyklonen und in der Nähe der Kante des eindringenden Keiles auftreten, in engem Zusammenhang mit diesen dynamischen Störungen der Keilgrenzen. Daß auch die Theorie die für die Entwickelung von Böen günstigen Umstände bereits erkennen läßt, gibt der ausgesprochenen Vermutung einen starken Rückhalt.

Einzelne Formen der Böen, wie die bogenförmige Böe, legen die Annahme nahe, daß sie aus einer größeren Gruppe von vereinigten Solenoiden bestehen, die mit ihren Enden auf der Erdoberfläche endigen. Zur Untersuchung der Bewegung hat man sich jedes auf der Erdoberfläche endigende Solenoid mit seinem Spiegelbild jenseits derselben vereinigt zu denken, das jenes zu einem geschlossenen Solenoid ergänzt.

Das hydrodynamische Analogon hierzu ist ein Wirbelring, von elliptischer Form, jede Ringhälfte liegt näherungsweise in einer Ebene, die gegen die Horizontale geneigt ist. Der Wirkungsweise der Solenoide entsprechend ist auch die Luftbewegung in der Umgebung eines Solenoidringes ähnlich geartet wie die in der Nähe eines der beschriebenen Keile. Die Luft der höheren Entropie strömt auf der Vorderseite empor, zwischen den vom Ring begrenzten Gebiete bewegt sich die Luft der niederen Entropie hindurch. Daß die Bewegung nicht den entgegengesetzten Charakter haben kann, ergibt sich aus der Richtung, in der die Beschleunigung der Solenoide wirksam ist.

Ein Solenoidring ist im allgemeinen nicht stationär, Unstetigkeiten in der Zustandsverteilung können aber darauf hinwirken, die Bewegung des Ringes zu verlangsamen oder aufzuheben. Dies möge an einem speziellen Beispiel näher illustriert werden. Naheliegend z. B. ist eine Unstetigkeit in der Zustandsverteilung, die hervorgeht aus der ungleichen Wärmeaufnahme der Luft über Wasser und über Land zu Zeiten starker Einstrahluug. Es werden sich Zustandsverschiedenheiten zwischen der Luft über dem Wasser und der über dem Lande ausbilden können. Ein breiter Wasserarm z. B., beiderseits von Land begrenzt, wird unter diesen Umständen von den Isentropenflächen überwölbt.



Die nebenstehende Figur stellt einen senkrechten Querschnitt durch das Unstetigkeitsgebiet dar, durch Spiegelung der äußeren Isentropenflächen an der horizontalen Grenzfläche erhält man die von der Grenzbedingung befreite Anordnung der Solenoide, die eine Zirkulation zwischen dem Luftgebiet über Wasser und Land hervorrufen. Der Bewegungscharakter ist in der Figur durch Pfeile angedeutet. Ein Solenoidring, der sich von einer Seite her dem abgeschlossenen Gebiet nähert, muß, um das jenseitige Ufer zu erreichen, diesen Raum mit den eingeschlossenen Solenoiden beseitigen. Die Überwindung des Zirkulationssystems zwischen Wasser und Land erfordert aber eine Arbeitsleistung von seiten des Wirbelringes. Indessen wird sich auch ein Stromsystem ausbilden können, bei dem sowohl der Solenoidring, wie die Solenoidschicht in dem durch Isentropenflächen abgegrenzten Gebiete stationär weiterbestehen. Notwendig hierzu erscheint die Ausbildung einer Art Trennungsfläche zwischen beiden Systemen nach Analogie mit

derjenigen zwischen zwei parallelen geradlinigen Wirbeln mit entgegengesetzter Rotation. Längs einer derartigen Fläche herrscht Strömungsgleichgewicht zu beiden Seiten, sowohl die Beschleunigung wie auch die Geschwindigkeit haben keine Komponenten normal zu dieser Fläche. Die Stabilität der Anordnung läßt sich nicht übersehen, vermutlich ist sie sehr instabil, jede neu hinzutretende Störung müßte eine Veränderung in der Lage der Fläche des Strömungsgleichgewichtes herbeiführen, womit eine Verlagerung der Solenoidgebilde parallel gehen kann.

§ 5. Zyklonen und Antizyklonen.

Die sehr reichhaltige Literatur über die großen atmosphärischen Störungen, die Zyklonen und Antizyklonen, bekundet das lebhafte Interesse, das die meteorologische Forschung auf diese Erscheinungen konzentriert; und wenn die vielen Versuche zu einer physikalischen Erklärung dieser Störungen trotz des umfangreichen Beobachtungsmateriales wenig bisher erfolgreich waren, so beweist dies, daß das Beobachtungsmaterial vielleicht nicht ausreicht, oder daß die benutzten Untersuchungsmethoden, die vorwiegend statistischer Art sind, nicht zum Ziele führen. Während die physikalischen Zusammenhänge zwischen Temperatur und Druckverteilung in den atmosphärischen Störungen nicht zum Gegenstand der Untersuchung wurden, wendete sich die Aufmerksamkeit der meteorologischen Forschung mehr den Beziehungen zwischen der Druckverteilung und der Richtung wie Stärke der sie begleitenden Luftströmungen zu. Nach der geläufigen Vorstellung werden diese durch horizontale Druckdifferenzen veranlaßt. Läßt man diese Annahme zu, so ist das Zustandekommen horizontaler Druckgradienten zu erklären. Hydrodynamisch sind jedoch das Geschwindigkeitsfeld und die Druckverteilung einander gleichwertig; in der Tat kann die Druckverteilung in bewegten Flüssigkeiten aus dem Geschwindigkeitsfeld ermittelt werden. Infolge der Gleichwertigkeit zwischen Druckverteilung und Geschwindigkeitsfeld gibt die Antwort auf die Frage nach dem Ursprung atmosphärischen Bewegungen auch Auskunft über die Entstehungsursache von horizontaler Druckgradienten.

Für den Fall, daß eine lokale, vom Boden ausgehende Erwärmung Luftbewegung veranlaßt, werden folgende Zwischenstufen

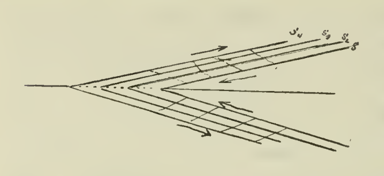
beim Übergang von Ruhe zur Bewegung angenommen. Die ursprünglich horizontal liegenden Isobaren- und Isothermenflächen werden über dem erwärmten Gebiete deformiert und gehoben. Mit der Hebung der Isobarenflächen beginnt die Ausbildung eines horizontalen Druckgradienten, unter dessen Wirkung die vorher in Ruhe befindliche Luft in Bewegung gerät und seitlich abtransportiert wird. Dabei bildet sich über dem erwärmten Gebiete ein Luftdruckminimum aus, nach dem die Luft am Boden hinzuströmt. Soweit die in Kürze wiedergegebene allgemeine Beschreibung der Vorgänge, die den Anlaß zur Entstehung der Druckdifferenzen und der Bewegung geben. Dazu ist zu bemerken, daß eine Dilatation, wie sie als Folge einer Erwärmung der Luft auftritt, eine so geartete Strömung nicht hervorrufen kann, weil aus Dilatationsvorgängen nur Bewegungen mit einem Geschwindigkeitspotential resultieren. Die wirkliche Luftströmung unter den geschilderten Bedingungen würde als Wirbelbewegung leichter verständlich sein, und die Wirbel kommen auch zu Stande, sobald die Isobaren- u. Isothermenflächen sich schneiden, wie dies aus dem Integral: $-\int \frac{1}{\varrho} \, dp = -R \int \frac{T}{p} \, dp$, das die Wirbelbeschleunigung mißt, hervorgeht. Solange demnach die beiden Flächenscharen parallel liegen, mögen sie gewölbt sein oder nicht, ist keine Beschleunigung wirksam, welche Bewegung veranlaßt. Nun verlangt die Richtung der Zirkulationsströmung der Luft eine bestimmte Art der Schnitte zwischen den Isobaren- und Isothermenflächen; um nun eine Übereinstimmung zwischen Erfahrung und Theorie herzustellen, muß man annehmen, daß die Isothermenflächen stärker gehoben werden als die Isobarenflächen. Somit werden in letzter Linie die Vorgänge des Entstehens von Bewegung, von Druckunterschieden auf thermodynamische Prozesse zurückgeführt, der Detailverlauf, d. h. der thermodynamische Weg, auf dem die Luft Wärme aufnimmt und Arbeit leistet, ist im einzelnen noch gänzlich unbekannt.

Es war naheliegend, die oben beschriebene Vorstellung von der Konvektion zur Erklärung der Zyklonen heranszuziehen. Die Konvektionshypothese erreichte indessen keine dominierende Stellung in den Anschauungen über den Ursprung der Zyklonen, weil der tatsächliche Befund in der Temperaturverteilung der Zentra gegenüber den Randgebieten gegen die Hypothese zu sprechen schien; es

wurden häufiger Zyklonen mit kalten Zentren anstatt mit warmen, wie die Hypothese es verlangte, festgestellt. Dabei wurde übersehen, daß Temperaturvergleiche nur dann einwandfrei sind, wenn die natürlichen Bedingungen der Luftmassen unverändert bleiben, sie also demselben Niveau angehören und gleichen Druck besitzen. Bei den Zyklonen besteht jedoch zwischen Rand und Zentrum eine Druckdifferenz; während die Luft, ohne ihr Niveau zu ändern, durch das Druckgefälle hindurch sich bewegt, dehnt sie sich adiabatisch aus, womit zugleich eine Abkühlung parallel geht. Daher kann das Zentrum einer Zyklone gegenüber dem warmen Randgebiet tatsächlich eine tiefere Temperatur haben, und so lange die potentielle Temperatur nicht geändert wird, widerspricht das kalte Zentrum der Konvektionshypothese nicht. Die wirkliche Sachlage wird daher durch die Unterscheidung der Zyklonen nach der Temperatur ihrer Zentra nicht erschöpft. Nimmt man dagegen an, daß, wie auch aus den Beobachtungsergebnissen hervorzugehen scheint, Solenoide in mehr oder minder keilförmiger Schichtung bei Bildung und Ablauf dieser atmosphärischen Störungen wirksam sind, dann führt die Anordnung der Isentropen- und Isothermenflächen in den Zyklonen und Antizyklonen zu einer tieferen Kenntnis der dynamischen Bedingungen, unter denen sie entstehen, umsomehr als sich Rückschlüsse über die Anordnung dieser Flächen bis zu einem gewissen Grade aus ihren Schnittlinien mit der Erdoberfläche, den Isothermen- und Isentropenlinien, ziehen lassen. Vor der Diskussion spezieller Beispiele von Zyklonen nach den Wetterkarten erscheint es angebracht, zur Orientierung der Vorstellung die wesentlichen Merkmale der Veränderungen an einfachen Fällen klarzulegen. Hierzu eignet sich besonders die Untersuchung der Bewegung eines Keiles von schichtförmig angeordneten Solenoiden mit überwiegend horizontalen Achsen. Mittels eines spiegelbildlichen Hilfssystems von Solenoiden läßt sich der Einfluß der festen Grenzfläche beseitigen, in dieser selbst liegen die Keilkanten, gebildet von den Schnitten der Isentropenflächen, die sich von beiden Seiten her der Grenzfläche nähern. Als Vertikalschnitt senkrecht zur Keilkante aufgefaßt, veranschaulicht nachstehende Figur die Sachlage.

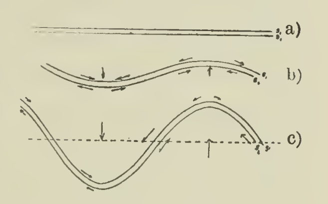
Die Betrachtung der Figur führt zu dem Resultat, daß mit der Bewegung des Keiles die seiner Kanten, als welche die Isentropenlinien in der Grenzfläche aufzufassen sind, parallel geht. Würde eine sonst

noch vorhandene Luftströmung den Transport des Keiles bewirken, so ist ersichtlich, daß sie bis an die Trennungsfläche beider Solenoidsysteme, der starren Grenzfläche, reichen muß. Es erscheint demnach wenig wahrscheinlich, daß die Zyklonen, bei denen sich derartige Keile nachweisen lassen, durch eine nur in der Höhe herrschende Luftströmung fortgetragen werden, wie dies vielfach behauptet wird. Ohne das Hinzutreten einer allgemeinen Strömung kann sich ein Keil lediglich unter der von seinen eingeschlossenen Solenoidsystem erzeugten Strömung bewegen.



Auf seiten des spitzen Winkels, der als inneres Gebiet bezeichnet sein möge, befindet sich die niedere Entropie, die Bewegung ist gegen die Kante gerichtet und hat im allgemeinen eine schwache Komponente gegen die Trennungsfläche. Im Gebiet des stumpfen Winkels, dem äußeren Gebiet, herrscht dagegen eine den Isentropenflächen entlang ziehende Strömung mit einer von der Begrenzungsfläche der Solenoidsysteme hinweggerichteten Komponente. Den Strömungsverlauf im inneren und äußeren Gebiet zeigen die eingezeichneten Pfeile in der Figur. Bei der natürlichen, aus dem eigenen Stromsystem resultierenden Bewegung des Keiles schiebt sich dieser infolge der nachdrängenden Luftmassen mit seiner Kante unter die vorgelagerten Luftmassen höherer Entropie. Unter dem Einfluß einer starken gegen die Keilkante gerichteten Strömung kann jedoch ein entgegengesetzter Transport des Keiles stattfinden. Von der Begrenzungsfläche aus betrachtet, bewegt er sich dabei nach der Seite der niederen Entropie. Es verdient bemerkt zu werden, daß bei der Entwicklung atmosphärischer Störungen beide Arten der Verlagerung der Keilfront vorkommen. Die Notwendigkeit hiervon ist nicht sehr leicht einzusehen. Der Vorgang als solcher scheint aber aufs engste mit der Erfüllung der Kontinuitätsbedingung beim Transport zusammenzuhängen. Zur Klarlegung des Sachverhaltes sei ein aus zwei ebenen Isentropenflächen gebildeter Keil mit zwischengelagerten Solenoiden angenommen. Die Keilfront wird auf der Grenzfläche durch zwei gerade Linien, entsprechend den beiden Isentropenflächen im Raum, abgebildet. Der gleichmäßige Transport des ganzen Keiles werde gestört durch eine ungleichmäßige Verteilung der Intensität der Solenoide, z. B. wenn sie längs einer

Strecke kleinere Querschnitte haben, als in dem übrigen Teil. Die Wirbelbeschleunigung ist dort größer, wo die größere Anzahl Solenoide eine gegebene Fläche durchsetzen; infolgedessen führt eine Verdichtung der Solenoide an einer Stelle ein stärkeres Vordringen des zugehörigen Teiles der Keilfront herbei, dabei muß die vorliegende, im stumpfen Winkel befindliche Luft abfließen, und zwar zu einem großen Teile nach beiden Seiten von der Mitte des schneller vordringenden Teiles der Keilfront. Diese abströmende Luft bewegt sich gegen die benachbarten Teile der Keilfront und hemmt deren Fortschritt, so entsteht aus der ursprünglich geradlinigen Keilkante eine wellenförmig deformierte mit einem wohlbestimmten Stromsystem, das die nebenstehende Figur schematisch in den einzelnen Entwicklungsstadien zeigt, und zwar stellt a) einen Teil der ausgedehnten geradlinigen Kante des Keiles in der Aufsicht dar, b) zeigt die beginnende Deformation, c) ein späteres Stadium. Aus



b) ist ersichtlich, daß derselbe Vorgang, welcher die Zurückdrängung der seitlich anschließenden Teile der Keilfront herbeiführt, die Vorwärtsbewegung des schneller bewegten Teiles unterstützt, indem die im spitzen Winkel verdrängten Luftmassen nach jenen abströmen. Es erhebt sich nun die Frage nach der Ursache der Weiterbildung der eingeleiteten Deformation, die in den wirklich vorkommenden Fällen zu Amplituden der Keilkante von 1000 und mehr Kilometer Länge führt. Wenn man sich die Lage der Isentropenflächen in dem deformierten Zustande vorstellt, hält es nicht schwer, den inneren Grund der Weiterbildung zu finden. Die den vordringenden Teil des Keiles begrenzenden Isentropenflächen überwölben das Gebiet der in dasselbe nachströmenden Luftmassen sattelförmig, umgekehrt zeigen die Isentropenflächen in den Nachbargebieten mit entgegengesetzter Bewegung der Keilfront eine der deformierten Keilfront ähnliche Ausbiegung, die der Kürze wegen als „Mulde" bezeichnet sei. Wie es die Wellenform der Entropielinien fordert, folgen Sättel und Mulden abwechselnd auf einander. Sie sind getrennt durch eine Übergangsschicht, erfüllt von Solenoiden, deren Achsen eine der Keilfront ähnliche Wellenform haben müssen. Der Vektorfluß der Solenoide besitzt die Richtung ihrer Achsen, sie durchsetzen einen vertikalen Querschnitt durch Sättel und Mulden

abwechselnd in entgegengesetzter Richtung. Nun wurde gezeigt, daß zwischen parallelen Solenoiden mit entgegengesetztem Vektorfluß eine Trennungsfläche entsteht. Ähnliches gilt für den Fall der einander gegenüberstehenden Solenoidschichten. Danach würde in jeder Mulde wie in jedem Sattel eine Trennungsfläche sich ausbilden, sie schneidet die starre Grenzfläche in einer Linie, die als mittlere Stromachse bezeichnet sei, weil sie dort den mittleren Verlauf der Strömung angibt. In den Mulden befindet sich stets Luft von höherer Entropie als in den Sätteln, denn jene liegen außerhalb, im stumpfen Winkel der Isentropenflächen, welche diese begrenzen. Die Art der Zirkulationsbeschleunigung ist daher in beiden Gebieten eine bestimmte, leicht angebbare. In den Mulden ist sie längs der Trennungsfläche nach oben, von der Grenzfläche hinweggerichtet, in den Sätteln dagegen dieser zugewandt, infolgedessen wird die Luft in den Mulden nach außen, in den Sätteln gegen die Grenzfläche mit einer Komponente beschleunigt und abtransportiert. Für die abströmende Luft muß Ersatz herbeigeführt werden, dieser kann in jedem der Gebiete nur aus den Reservoiren, d. h. den Räumen, mit denen sie zusammenhängen; herbeifließen und zwar regelt sich die Einströmungsgeschwindigkeit nach dem Bedarf, entsprechend der abtransportierten Luftmenge, diese ist durch die horizontale Flächenausdehnung, der Mulden, Sättel und der Geschwindigkeit des Abtransportes gegeben. Es sei Q der Flächeninhalt einer Mulde in der Horizontalebene, w die vertikale Geschwindigkeit; unter annähernd gleicher Dichte der ab- und zuströmenden Luft ist die Geschwindigkeit des Ersatzstromes gegeben durch $v = \frac{Q \cdot w}{q}$, wobei q den vertikalen mittleren Eintrittsquerschnitt einer Mulde oder eines Sattelgebietes bezeichnet, beide als stationär angenommen. Der Eintrittsquerschnitt kann große Breite, jedoch nur geringe Höhe besitzen, der Austrittsquerschnitt hat dagegen große Länge und nahezu dieselbe Breite. Das Auftreten großer Geschwindigkeiten erklärt sich daher einfach; so würde zu einer Eintrittshöhe von 1 km und einer Längenausdehnung einer Mulde von 1000 km bei beiderseits gleicher Breite die Einströmungsgeschwindigkeit zu berechnen sein aus

$$v = 1000 \cdot w$$

Angenommen es sei $w = 2 \frac{cm}{sec}$, dies ergibt für die Geschwindigkeit der horizontalen Einströmung $20 \frac{m}{sec}$

Wenn die atmosphärischen Störungen in der oben geschilderten Weise zu Stande kommen, so muß sich dieses in der Anordnung der Sättel und Mulden zeigen, diese lassen sich aber aus der Lage und Verteilung der Isentropenlinien auf der Erdoberfläche unschwer nachweisen, sofern die Beobachtungen darüber gleichzeitige sind, wie z. B. die Daten zum Entwurf von Wetterkarten. Der besseren Übersicht und der Abwesenheit topographischer Einflüsse halber wurde die Entropieverteilung über dem Ozean aus vorhandenen Beobachtungsdaten für einen gegebenen Zeitpunkt ermittelt. Diese, wie die zugehörige Wetterlage, wurden einer Karte des von der Deutschen Seewarte herausgegebenen Atlas des Atlantischen Ozeans entnommen. Die beigefügte Karte I zeigt die Anordnung der Entropielinien. Sie ziehen sich, wie ersichtlich, wellenförmig über den ganzen Ozean, und zwar sind die Muldengebiete durch die polaren, die Sättel durch die dem Äquator zugewandten Amplituden gekennzeichnet. Die barometrischen Minima liegen sämtlich in den Mulden, die Kerne der Antizyklonen dagegen in Sätteln und zwar stets unsymmetrisch zu den Spuren der Trennungsflächen in den einzelnen Gebieten. Zwischen Muldenmitte und westlich anschließendem Sattel liegt die Zyklonenmitte; der Raum bis zur nächsten Muldenmitte ist von einer Antizyklone eingenommen. Nun tritt diese Asymmetrie der Kerne der atmosphärischen Störungen bezüglich der Trennungs- oder Scheidelinien immer auf, sie läßt sich an jeder Wetterkarte nachweisen, und es scheint dieses Verhalten der Zentra auf eine ausgeprägte Verschiedenheit der Anordnung der Solenoide, hinzuweisen.

Als weitere Belege für das Auftreten der Sättel und Mulden in den Zyklonen, wie für den Charakter der zugehörigen Luftströmungen sei auf die dieser Arbeit beigefügten Wetterkarten [1]) verwiesen, in die außer der Druckverteilung auch die Entropieverteilung eingezeichnet sind. (Die Luftentropie bezieht sich dabei auf trockene Luft; zu ihrer Berechnung wurde aus den Angaben der relationen Feuchtig-

[1]) Verkleinerte Kopien von Wetterkarten der Deutschen Seewarte.

keit der Partialdruck des Wasserdampfes ermittelt und aus dem Gesamtdruck eliminiert.)

Auf wichtige Merkmale der Vorgänge, die in den Wetterkarten dargestellt sind, sei kurz hingewiesen. In der Wetterkarte vom 1. November erstreckt sich das Muldengebiet bis zum Druckminimum und schließt dieses ein. Da die Isentropenlienien, welche am Boden die Mulde begrenzen, von außen bis nach dem Minimum vordringen und der Muldenraum wesentlich isentrope Luftmassen enthält, so deutet dies auf eine adiabatische Druck- und Temperaturverteilung hin, dem Druckgefälle von etwa 10 mm in der horizontalen Richtung entspricht hierbei eine durchschnittliche Temperaturabnahme von ca. 1° in der gleichen Richtung. Bezüglich des Randgebietes, aus dem die Luftmassen des Muldenraumes stammen, ist das Zentrum der Depression rund 3° kälter, eine Folge der adiabatischen Expansion. Gegenüber dem nordwestlichen Rand, wo bereits die kalten Luftmassen eindringen, ist das Zentrum wärmer. Je nach dem Standpunkt kann man also die Zyklone zu der Kategorie der warmen oder kalten Zentra rechnen. Wählt man dagegen die Entropie als unterscheidendes Merkmal, so zeigen sich die barometrischen Minima stets in den Mulden, sie liegen also auf Seiten der höheren Entropie.

Wie die Wetterkarte vom 1. November ferner erkennen läßt, findet in der Nähe des Minimums, und zwar in horizontaler Richtung, eine starke Entropieänderung auf kurzen Entfernungen statt. Nachdem die Luft den weiten Weg vom äußeren Rande der Mulde bis zum Minimum ohne Entropieänderung zurückgelegt hat, ist nicht anzunehmen, daß nunmehr die Entropieänderung fast unvermittelt vor sich geht. Vielmehr dürfte es sich hierbei um eine Überlagerung der unteren Luftschichten handeln. Die vertikale Bewegung setzt sich kontinuierlich fort, nachdem sie bereits in dem weiter zurückliegenden Teil der Mulde eingeleitet worden ist. In diesem Teil des Stromgebiets geht hauptsächlich die Expansion vor sich. Daß eine solche statthat, folgt aus dem adiabatischen Druck- und Temperaturgefälle, die zugehörige Stömung werde daher als expansiv, der Strom als Expansionsstrom bezeichnet. Im Gegensatz hierzu ist die Strömung im Sattelgebiet vorwiegend eine kompressive, der Strom wird als Krompressionsstrom aufgefaßt. Sein Charakter ergibt sich aus der Betrachtung der Solenoidbeschleunigung in den Sättelgebieten, wo

sie, gemäß den früheren Ausführungen, gegen den Boden gerichtet ist. Infolgedessen kann dort eine aufwärts gerichtete Bewegung nicht vorhanden sein. Charakteristisch für den Verlauf der beiden Strömungen ist ihre Richtung. In der horizontalen Ebene bewegt sich der Expansionsstrom in der Richtung der abnehmenden, der Kompressionsstrom in der Richtung der wachsenden Entropie, und die mittleren Stromachsen sind gekennzeichnet durch die Scheidelinien, welche die Mulden und Sättel je symmetrisch durchsetzen. Ein Vergleich der Wetterkarte vom 2. November mit derjenigen von tags zuvor zeigt, daß der Kompressionsstrom in der eingeschlagenen Richtung weitere Fortschritte gemacht hat, der Sattel ist vorgedrungen und hat die Mulde seitlich abgedrängt. Der Expansionsstrom wurde hierbei teilweise abgeschnürt, weil aus dem SE-Quadranten eine ungenügende Luftzufuhr stattfand und im Süden die Alpen die freie Kommunikation der Luftmassen von Süden nach Norden verhinderten. Dieses bemerkenswerte Verhalten der beiden Strömungen tritt unter gleichen Umständen immer wieder in Erscheinung, und die Abschnürung des Expansionsstromes würde auch erklären, weshalb große Depressionen, deren Minima das Festland im südlichen Teile Skandinaviens erreichen, an Ausdehnung bedeutend abnehmen. Die veränderte Zustandsverteilung über Land sowie die vermehrte Reibung können diesen Vorgang bedeutend unterstützen.

Eine theoretische Untersuchung der Zyklonen muß sich auch mit der Frage beschäftigen, aus welchen Gründen der Einbruch kalter Luftmassen stets auf den westlichen Seiten der Minima erfolgt. Diese Erscheinung hängt zusammen mit der Ursache, welche die bekannten Drehungsrichtungen der Luftbewegung in den Zyklonen und Antizyklonen verursacht und man kann annehmen, daß diese Ursache die Coriolisbeschleunigung ist. Die bisher benutzten Gleichungen galten nur für den Fall einer Bewegung auf der ruhenden Erde, die Berücksichtigung der Erdrotation erfordert die Hinzunahme der Zusatzglieder, welche die Coriolisbeschleunigung ausdrücken. Wird die Bewegung auf ein Koordinatensystem bezogen, dessen xy-Ebene in die des Horizontes fällt, und die z-Achse mit der nach oben positiv gerechneten Vertikalen zusammenfällt, dann lauten die Bewegungsgleichungen nach Lamb, Poincaré u. a., wenn ω_1 ω_2 ω_3 die Winkelgeschwindigkeiten um die x, y, z- Achsen bedeuten:

$$\frac{Du}{dt} + 2w\,\omega_2 - 2v\omega_3 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + X + x\,(\omega_2{}^2 + \omega_3{}^2) - \omega_1\,(\omega_3 z + \omega_2\,y$$

1) $$\frac{Dv}{dt} + 2u\omega_3 - 2w\omega_1 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y + y\,(\omega_3{}^2 + \omega_1{}^2) - \omega_2\,(\omega_3 y + \omega_1 x)$$

$$\frac{Dw}{dt} + 2v\omega_1 - 2u\omega_2 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + Z + z\,(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2) - \omega_3\,(\omega_1 x + \omega_2 y)$$

X, Y, Z sind die Komponenten der äußeren Kräfte. Die Winkelgeschwindigkeit ω der Erdrotation hat, auf die obigen Achsen bezogen, die Komponenten

2) $$\omega_2 = 0 \qquad \omega_3 = \omega \sin\varphi \qquad \varphi = \text{geogr. Breite} \qquad \omega_1 = \omega \cos\varphi$$

Betrachtet man eine geschlossene, in der Flüssigkeit mit bewegte Kurve sowohl von einem ruhenden wie von dem mitrotierenden Koordinatensystem aus, die beide zu einem Zeitpunkt zusammenfallen mögen und bildet das Integral der Zirkulationsbeschleunigung längs der Kurve für das ruhende System, so kann man hieraus auch das Integral ableiten, das für den Beobachter, der die Rotation mitmacht, Geltung besitzt. Die Geschwindigkeiten, beurteilt vom ruhenden System, seien mit $u^1\ v^1\ w^1$, und entsprechend die Koordinaten eines Punktes mit $x^1 y^1 z^1$ bezeichnet. δx^1, δy^1, δz^1 sind Linienelemente der Kurve, betrachtet vom ruhenden Koordinatensystem, weiter gilt die Beziehung:

3) $$\frac{D}{dt}(u^1\,\delta x^1) = \frac{Du^1}{dt}\delta x^1 + u^1\frac{D(\delta x^1)}{dt}$$

Da nun:

$$\frac{D\delta x^1}{dt} = \delta\frac{Dx^1}{dt} = \delta u^1$$

so folgt:

$$\frac{D}{dt}(u^1\delta^1 x^1) = \frac{Du^1}{dt}\delta x^1 + u^1\delta u^1$$

Analog werden die übrigen Komponenten erhalten.

Die Zirkulationsbeschleunigung längs einer Kurve, vom ruhenden Koordinatensystem aus betrachtet, folgt nunmehr aus:

$$4)\qquad \frac{D}{dt}\oint u^1\delta x^1 + v^1\delta y^1 + w^1\delta z^1 = +\oint p dv$$

Wählt man die Achsen des ruhenden und bewegten Systems derart, daß sie im Zeitpunkte der Beobachtung zusammenfallen, dann sind die Projektionen eines Linienelementes δs der Kurve in beiden Koordinatensystemen die gleichen, es ist also:

$$5)\qquad \begin{aligned} \delta x^1 &= \delta x \\ \delta y^1 &= \delta y \\ \delta z^1 &= \delta z \end{aligned}$$

ebenso ist, wenn $\omega_2 = 0$, und für ω_1, ω_3 die durch Gl. 2) gegebenen Beziehungen eingesetzt werden:

$$6)\qquad \begin{aligned} \frac{Du^1}{dt} &= \frac{Du}{dt} - 2\omega \sin\varphi\, v \\ \frac{Dv^1}{dt} &= \frac{Dv}{dt} + 2\omega \sin\varphi\, u + 2\omega_1 \cos\varphi\, w \\ \frac{Dw^1}{dt} &= \frac{Dw}{dt} - 2\omega \cos\varphi\, v \end{aligned}$$

ferner hat man

$$7)\qquad \begin{aligned} u^1 &= u - y\omega \sin\varphi \\ v^1 &= v + x\omega \sin\varphi + z\omega \cos\varphi \\ w^1 &= w - y\omega \cos\varphi \end{aligned}$$

Bildet man hiermit die rechten Seiten der Gl. 3), so wird die Zirkulationsbeschleunigung (Gl. 4), ausgedrückt in den Koordinaten des bewegten Koordinatensystems, von dem aus die Kurve jetzt betrachtet wird. Die Transformation ergibt wegen: $\delta u^1 = \delta u - \delta y\omega \sin\varphi$ etc. den Ausdruck:

$$8)\qquad \begin{aligned} \frac{D}{dt}\oint u^1\delta x^1 + v^1\delta y^1 + w^1\delta z^1 &= \frac{D}{dt}\oint u\delta x + v\delta y + w\delta z \\ &+ \omega\oint \sin\varphi\,[(u\delta y - v\delta x) + (x\delta v - y\delta u)] \\ &+ \omega\oint \cos\varphi\,[(w\delta y - v\delta z) + (z\delta w - y\delta z)] \end{aligned}$$

Betrachtet man φ als nahezu konstant, so können $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ vor die Integrale gesetzt werden, diese enthalten nun die Zeitdifferentiale von: $(x\delta y - y\delta x)$ bezüglich $(z\delta y - y\delta z)$.

Daher ist:

$$9)\quad \frac{D}{dt}\oint u'\delta x' + v'\delta y' + w'\delta z' = \frac{D}{dt}\int u\delta x + v\delta y + w\delta z$$
$$+ \omega \sin\varphi \oint \frac{d}{dt}(x\delta y - y\delta x) + \omega \cos\varphi \oint \frac{d}{dt}(z\delta y - y\delta z)$$

wofür man auch schreiben kann:

$$10)\quad \begin{aligned} \oint \frac{d}{dt}(x\delta y - y\delta x) &= \frac{d}{dt}\oint (x\delta y - y\delta x) \\ \oint \frac{d}{dt}(z\delta y - y\delta z) &= \frac{d}{dt}\oint (z\delta y - y\delta z) \end{aligned}$$

Die beiden letzten Kurvenintegrale lassen sich mit der Riemannschen Formel:

$$11)\quad \oint P dx + Q dy = -\iint \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy$$
$$P = P(xy)$$
$$Q = Q(xy)$$

in Flächenintegrale umformen. Es sei $P = y$, $Q = x$, dann folgt aus 11)

$$12)\quad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -2$$

setzt man an Stelle von P, z und $Q = -y$, so ist:

$$12^1\quad \frac{\partial P}{\partial z} = 1 \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -1: \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 2$$

folglich:

$$\oint x\delta y - y\delta x = 2\iint \delta x \delta y = 2\,\sigma_{xy}$$
$$\oint z\delta y - y\delta z = -2\iint dy dz = -2\,\sigma_{zy}$$

Die Flächenintegrale sind zu erstrecken über die von der geschlossenen Kurve in den (xy) und (zy) Ebenen projizierten Flächen, diese seien mit σ_{xy}, σ_{zy} bezeichnet. In Verbindung mit Gl. 10) erhält man hiermit:

$$13)\quad \frac{D}{dt}\oint u'\delta x' + v'\delta y' + w'\delta z' = \frac{D}{dt}\oint u\delta x + v\delta y + w\delta z$$
$$+ 2\omega \sin\varphi \frac{d\sigma_{xy}}{dt} - 2\,\omega \cos\varphi \frac{d\sigma_{zy}}{dt} = \oint p dv$$

Denkt man sich die Kurve auf einer der Flächen $p = \text{const.}$, $T = \text{const.}$ oder $S = \text{const.}$ im Augenblick der Beobachtung liegend,

so erhält das Ringintegral über die Zustände $\oint pdv$ (wenn man vom Wasserdampfgehalt der Atmosphäre absieht) den Wert Null, und die Integration von 13) nach der Zeit ergibt: mit

$$\varkappa^1 = \oint u^1 \delta x^1 + v^1 \delta y^1 + w^1 \delta z^1$$

14) $$\varkappa^1 = \quad (u\delta x + v\delta y + w\delta z) + 2\,\omega \sin\varphi\, \sigma_{xy} - 2\,\omega \cos\varphi\, \sigma_{yz}$$

Die Kurve liege hauptsächlich der horizentalen Ebene parallel, dann darf die in der yz- Ebene projizierte Fläche σ_{xy} als klein gegen die der horizontalen Projektion angesehen und deshalb vernachlässigt werden. Wenn auch die Vertikalgeschwindigkeit w gegen u, v als klein betrachtet wird, so ist:

15) $$\varkappa^1 = \oint u\delta x + v\delta y + 2\,\omega \sin\varphi\, \sigma_{yz}$$

Angenommen u, v seien Null, die Kurve geht durch Raumstellen mit der Luftgeschwindigkeit Null, dann ist:

$$\varkappa^1 = 2\,\omega \sin\varphi\, \sigma_{xy}$$

und dieses verschwindet für den Fall, daß die Kurve in niederen Breiten, also am oder nahe dem Äquator, parallel zu der horizontalen Ebene sich befindet.

Die relative Zirkulation

$$\varkappa = \oint udx + vdy$$

entscheidet durch den Wert, der sich für eine in der Atmosphäre geschlossene und mitbewegte Kurve ergibt, über den Charakter der Bewegung. Verschwindet die Zirkulation, so hat die Bewegung ein Geschwindigkeitspotential, ist $\varkappa$ von Null verschieden, so existieren Wirbel. Dem Vorzeichen nach kann $\varkappa$ sowohl positiv wie negativ sein, sobald über die Umlaufsrichtung bei der Integration längs einer Kurve verfügt wird. Als positiv soll nun diejenige Integrationsrichtung gelten, bei der ein beweglicher Punkt die von der Kurve umrandete Fläche entgegengesetzt zur Uhrzeigerdrehung umkreist. Hat die Geschwindigkeit eine der Umlaufsbewegung des Punktes gleiche Richtung, so ist $\varkappa$ positiv, im andern Fall negativ. Der Raum der Atmosphäre wird stets als einfach zusammenhängend

betrachtet. In dem besonderen Falle, daß eine Kurve zwei Wirbelsysteme von je gleicher Wirbelintensität, aber entgegengesetzter Rotation umschließt, wird offenbar der Wert der Zirkulation für dieselbe gleich Null, es bedeutet dies jedoch nicht, daß die Strömung in dem umschlossenen Gebiet ein Geschwindigkeitspotential besitzt, vielmehr wird man für die Untersuchung der Bewegung jedes Wirbelsystem getrennt zu betrachten haben und dabei berücksichtigen, daß infolge der Wirbelbeschleunigung die relative Zirkulation $\varkappa$ mit der Zeit veränderlich ist und deshalb ihr Wert, nur für den Augenblick der Beobachtung Gültigkeit besitzt. Nach dem Gesagten hält es nicht schwer, über den Bewegungscharakter in Zyklonen und Antizyklonen eine Entscheidung herbeizuführen und zwar dadurch, daß man den Wert der Zirkulation aus der Geschwindigkeitsverteiluug längs einer Kurve bestimmt. Dazu ist im allgemeinen eine graphische Integration notwendig. Vielfach geben Wetterkarten alle zur Bestimmung der Zirkulation notwendigen Daten, man kann sie z. B. für Isobaren ermitteln, und erhält aus dem Wert von

$$\oint udx + vdy = \oint Vds \cos(Vds)$$

die relative Zirkulation. In dem besonders einfachen Fall einer kreisförmigen Isobare mit in allen Punkten konstanter und tangential gerichteter Geschwindigkeit V_0 erhält $\varkappa$ den Wert

$$\varkappa = V_0 \, 2\pi r$$

wobei r den Kreisradius bedeutet. Seine Größe betrage z. B. 500 km und die Geschwindigkeit V_0 sei $10 \frac{m}{sec}$ in der Peripherie, dann hat $\varkappa$ den Wert $\pi . 10^{11}$ cm^2 sec^{-1}. Die Isobaren sind im allgemeinen nicht kreisförmig und die Strömungsgeschwindigkeit der Luft längs denselben nicht konstant, indessen genügt bereits die Tatsache, daß die Geschwindigkeit nach demselben Umlaufssinne längs einer Isobare verteilt ist, zur Feststellung der Existenz einer Zirkulation. Es verhält sich alles so, wie wenn innerhalb dem umrandeten Gebiet Wirbel vorhanden wären, für diese kann aber die mit der Erdrotation zusammenhängende Coriolis-Beschleunigung nicht verantwortlich gemacht werden. Wenn aber der Bewegungscharakter durch Wirbel von bestimmter Rotation gekennzeichnet ist, so genügt es kaum, den tatsächlichen Erfolg, den Sinn der Drehung der Luftbewegung, allein aus der Coriolis-Beschleunigung zu erklären, um so mehr, als

diese in der Nähe des Äquators überhaupt verschwindet, während die Luftbewegung in den dortigen Zyklonen das gleiche Drehungsgesetz befolgt wie in den gleichartigen Erscheinungen auf höheren Breiten. Nach der hier vorgetragenen Hypothese, der die Beobachtungsergebnisse nicht widersprechen, treten dagegen zwei verschiedenartige Luftströme in den Zyklonen auf, in dem einen vollzieht sich der Abtransport warmer Luftmassen, dieser wurde als Expansionsstrom bezeichnet, er liegt ganz in einer von den Isentropenflächen während der Verdrängung der Keilfront gebildeten Mulde. Der Kompressionsstrom dagegen vollzieht sich in Sattelgebieten, diese stellen die vordringenden Teile der Keilfront dar, und werden von den Isentropenflächen überwölbt. In jedem dieser Gebiete verschwindet für alle horizontal liegenden Kurven die Wirbelbeschleunigung und die Zirkulation. Für jede geschlossene horizontale Kurve, welche die Übergangszone zwischen der Mulde und Sattel durchsetzt, verschwindet die Zirkulationsbeschleunigung nicht immer, wie sich zeigen läßt. Daher müssen dort Solenoide vorhanden sein, die auf der Erdoberfläche endigen. Zahlreiche, vom Verfasser ausgeführte Bestimmungen der Zirkulationsbeschleunigung längs horizontalen, die Trennungszone durchdringenden Kurven ergaben zu kleine Werte, um die wirklich vorhandene Zirkulation daraus zu erklären. Die Solenoide liegen im Luftraum nahezu parallel der Erdoberfläche, mit einer sehr geringen Neigung gegen diese, und die Zahl der Solenoide, welche die Erdoberfläche schneiden, ist tatsächlich gering gegen die übrigen und haben auch weit größere Querschnitte als diese. Es ist daher kaum anzunehmen, daß sie merklich zu der Zirkulation längs horizontal liegender Kurven beitragen. Die horizontale Luftströmung wird daher überwiegend bedingt durch die gleichartig liegenden Solenoide, die bei großer Längenausdehnung doch relativ nahe der Erdoberfläche sich befinden und die horizontale Luftzufuhr nach dem von ihnen bewirkten vertikalen Abtransport von Luftmassen in Mulden und Sätteln regeln. Da nun die Ersatzströmungen im Mittel entgegengesetzte Richtung haben, ist die Bewegung an der Grenze der beiden Ströme eine unstetige, es verhält sich alles so, wie wenn die Übergangsschicht von dem einen nach dem andern Stromgebiet an den Unstetigkeitsstellen von Wirbeln erfüllt wäre, und hieraus erklärt sich auch die Zirkulation längs horizontalen geschlossenen Kurven, wie

z. B. den Isobaren. Indessen könnte der Einbruch kalter Luftmassen, der Kompressionsstrom, ebenso auf der Ost- wie auf der Westseite der barometrischen Minima vorkommen. Daß er nun stets auf der Westseite der Minima und auf beiden Hemisphären gleichartig stattfindet, ist noch zu erklären. Die Erscheinung dürfte aus der Coriolisbeschleunigung hervorgehen. Nach Gl. 8) ist der auf ein ruhendes Koordinatensystem bezogene Wert der Zirkulationsbeschleunigung gegeben durch:

$$\frac{D}{dt}\oint u^1 dx^1 + v^1 dy^1 + w^1 dz^1 = \frac{D}{dt}\oint udx + vdy + wdz$$
$$+ 2\frac{d}{dt}(\omega \sin \varphi \sigma_{xy}) - 2\frac{d}{dt}(\omega \cos \varphi \sigma_{yz})$$

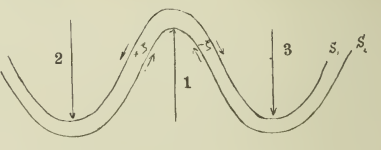
oder mit Vernachlässigung der vertikalen Komponenten w^1, w, (σ_{yz}) und mit: $2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, folgt nach Umformung der Linien- in Flächenintegrale

$$\frac{D}{dt}\oint \zeta^1 dx^1 dy^1 = \frac{D}{dt}\oint \zeta\, dx\, dy + \frac{d}{dt}(\omega \sin \varphi\, \sigma_{xy})$$

und entsprechend für die Zirkulation:

$$\varkappa^1 = \varkappa + \omega \sin \varphi\, \sigma_{xy}$$

In dem Falle, daß die vertikale Rotationskomponente ζ der Richtung nach übereinstimmt mit $\omega \sin \varphi$, wirken beide in gleichem Sinne, ist ζ jedoch negativ, sowirken sie einander entgegen. Wie die nebenstehende Figur erkennen läßt, ist ζ positiv beim Übergang von der Mulde (1) nach dem Sattel (2) in westlicher, negativ in östlicher Richtung. (3)Erdrotation und die Drehung ζ unterstützen sich wechselseitig im ersten Falle, im zweiten vermindert sich die Wirkung. Auf der südlichen Hemisphäre erhält ζ in den korrespondierenden Gebieten das entgegengesetzte Vorzeichen, zugleich wird $\omega \sin \varphi$ negativ. Es vereinigt sich auch hier demnach die Wirkung von $-\zeta$ und $\omega \sin \varphi\, (\sigma_{xy})$ beim Übergang von Mulde zu Sattel in westlicher Richtung, beide wirken einander entgegen von Mulde zu Sattel nach Osten, hier wird ζ positiv.

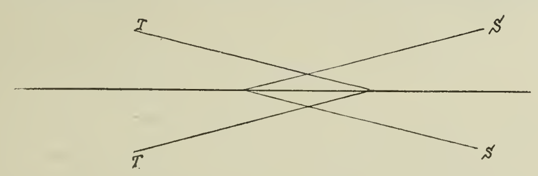


In demselben Sinne wie die Zirkultion wird auch die Zirkulationsbeschleunigung durch die Erdrotation beeinflußt, wenn die von der

Kurve umrandete Fläche σ_{xy} gedehnt wird. Während eine Druckerniedrigung zunächst nur eine vertikale Expansion der Luft voraussetzt oder zur Folge hat, wird im obigen Falle eine Expansion in horizontaler Richtung gefordert, und diese tritt ein, wie die Tatsache beweist, daß die Isentropenlinien oder die Kurven gleicher potentieller Temperatur im Gebiet des Expansionsstromes vom Randgebiet einer Depression bis zum Minimum sich erstrecken, wobei dann, ganz entsprechend der Druckabnahme vom Rand bis zum Zentrum, ein adiabatisches Temperaturgefälle in gleicher Richtung vorherrscht, das auch durch die äußeren Einflüsse der Wärmezufuhr und Abgabe nicht ganz verdunkelt wird.

§ 6. Entropietransport und Bewegung im Zusammenhang mit Druckänderungen.

Bei der Annäherung einer Zyklone an einen Ort zeigt sich, daß mit dem sinkenden Druck ein Temperaturanstieg parallel geht. Entweder wird hierbei der Luft während der Druckerniedrigung Wärme zugeführt, oder es wird die vorher anwesende Luft ersetzt durch neue von anderem Zustand. Von diesen beiden Möglichkeiten scheint der Luft- und damit der Entropietransport vorzuherrschen. Die hierbei sich abspielenden Begleitvorgänge gestatten eine anschauliche Deutung durch die Verlagerung der Isentropen- und Isothermenflächen.



In vorstehender Figur ist schematisch die Anordnung der Isentropen- und Isothermenflächen in einem vertikalen Querschnitt dargestellt. Anstatt der Flächenscharen sind nur je eine Fläche als Repräsentanten derselben gewählt. Unter der Annahme von Schnitten zwischen den Flächen werden Solenoide vorausgesetzt. Man fügt die spiegelbildlichen Flächen und Solenoide hinzu, um den Einfluß der starren Grenzfläche zu eliminieren. Die Bewegung hat dann jeden-

falls Komponenten, die auf Seiten der höheren Entropie nach oben, auf Seiten der niedern nach unten und gegen die Keilkante gerichtet sind. Wären die Isentropenflächen zugleich Stromflächen, dann würden sie ihre Lage im Raum nicht ändern, solange keine äußeren Einwirkungen stattfinden. Diese ausschließend, behält jedes ruhende oder bewegte Luftelement seine Entropie bei, daher ist:

$$1)\qquad \frac{DS}{dt} = 0$$

wobei das Symbol: $\frac{D}{dt}$, wieder den substantionellen Differentialquotieten:

$$\frac{\partial}{\partial t} + u\,\frac{\partial}{\partial x} + v\,\frac{\partial}{\partial y} + w\,\frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

Bezeichnet $\frac{dS}{d\alpha}$ das Entropiewachstum längs der Normalen zu der Fläche, und es seien l, m, n die Richtungs-cos der Geschwindigkeit V und l′, m′, n′ die des Entropiegradienten $\frac{dS}{d\alpha}$

$$2)\qquad u = Vl \quad v = Vm \quad w = Vn$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{dS}{d\alpha}\,l', \quad \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{dS}{d\alpha}\,m', \quad \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{dS}{d\alpha}\,n',$$

Dann kann anstelle von 1) gesetzt werden:

$$3)\qquad \frac{DS}{dt} = 0 = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{dS}{d\alpha}\,.\,V\cos\psi$$

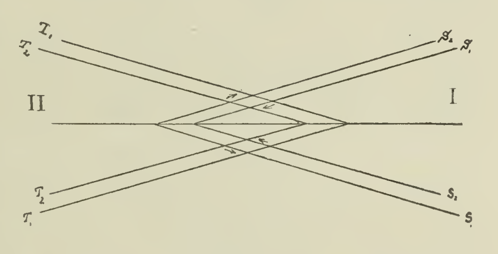
wobei ψ den Winkel zwischen der Geschwindigkeitsrichtung und $\frac{dS}{d\alpha}$ mißt. Für $\psi = \pi/2$ ist das zweite Glied Null, daher auch $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$. Die Bewegung erfolgt längs Isentropenflächen, diese selbst bleiben stationär. Die Isothermenflächen brauchen unter denselben Umständen dagegen nicht stationär zu bleiben, es können Druck- und Temperaturänderungen adiabatisch vor sich gehen; während der Druck fällt oder steigt, sinkt oder wächst die Temperatur gemäß:

$$4)\qquad \frac{Jc_p}{c_p - c_v}\,\frac{dT}{T} = \frac{dp}{P}$$

Anders verhält sich die Sachlage, wenn die beiden Flächenscharen mit der Strömung sich bewegen. Wie leicht einzusehen, kann bei einer gleichmäßigen Translation der beiden Flächenscharen in ihrer relativen Anord-

nung nichts geändert werden. Herrscht an der Erdoberfläche zu irgend einem Zeitpunkt der normale Luftdruck, so bleibt dieser unverändert bei einer gleichmäßigen Verschiebung der Flächen S = const. T = const. Je nach der Bewegungsrichtung erhalten dann die Orte, über denen der Transport statthat, wachsende Temperatur und Entropie oder die entgegengesetzten Änderungen. Der Luftdruck bleibt konstant. Dieser ändert sich dagegen, wenn außer der Bewegung noch Expansion und Kompression in der Atmosphäre auftreten. Durch diese Vorgänge kommt eine relative Verschiebung der Isentropen- gegen die Isothermenflächen zu stande, und zwar werden von der Expansion und Kompression nur die Isothermen-, nicht die Isentropenflächen beeinflußt, soweit diese Vorgänge adiabatisch verlaufen. Aus der gegensätzlichen Stellung der beiden Flächenscharen ergibt sich, daß die Expansion oder Kompression mit der Bewegungsrichtung der Flächen S = const. in einem bestimmten Zusammenhang stehen, der sich leicht an der untenstehenden Figur ersehen läßt. S und T seien zwei Flächen, als Repräsentanten der bezüglichen Schar gedacht. Die Figur stellt einen Vertikalschnitt dar.

Es erfolge die Verlagerung der Isentropenflächen in der Richtung von II nach I, dann ist, wenn einer der Expansions- oder Kompressions-Vorgänge statt haben soll, nur die Expansion möglich, die Isothermenflächen werden ebenfalls verlagert, jedoch nicht um denselben Betrag wie die Isentropenflächen, weil durch die Expansion zugleich eine Abkühlung stattfindet. Die Orte, über denen der genannte Entropietransport vor sich geht, erfahren Druckerniedrigung infolge der Expansion im ganzen Expansionsgebiet, und Temperaturzunahme infolge des Transportes der Temperaturflächen. Im ganzen betrachtet gehen während der Expansion die Keile der Isentropen- und Isothermenflächen relativ auseinander. Erfolgt dagegen der Transport der Entropie im Sinne der Richtung von I nach II, (s. vorstehende Fig.), so findet Kompression statt, die Keile dringen ineinander, dabei erfahren die Orte im Bereiche dieses Vorganges Temperaturabnahme und Druck-



anstieg. Infolge der Kompression nimmt die Temperatur weniger ab, als wenn die Verringerung aus gleichmäßigem Transport beider Flächenscharen allein hervorginge. Auf die Verlagerung der Isentropenflächen sind die adiabatische Expansion und Kompression ohne Einfluß, sie bewegen sich mit dem Luftstrom. Damit auch ihre Schnittlinien mit der Grenzfläche, dem Boden, verlagert werden, muß dort ebenfalls eine Bewegungskomponente der Strömung in der Verlagerungsrichtung der Isentropenflächen vorhanden sein, daher kann man bereits aus der Strömungsrichtung in Bodennähe erkennen, welcher der Vorgänge zu erwarten ist, d. h. ob Druckab- oder -zunahme stattfinden können. Die Druckabnahme wird stets möglich sein, wenn die horizontale Luftströmung gegen die abnehmende Entropie in gleicher Ebene gerichtet ist, ein Druckanstieg dagegen, wenn die Strömung im Sinne der wachsenden Entropie vor sich geht. Die Verteilung der Entropie, wie die Richtung der Luftströmungen können aus den Wetterkarten ersehen und danach die als möglich anzusehenden Druckänderungen beurteilt werden.

Der Vorteil dieser Methode ist, daß man aus dem Zusammenhang zwischen den Richtungen der Luftströmungen und dem Entropietransport ohne jede Rechnung die Art der Druckänderungen über großen Gebieten finden kann, sobald die Zustandsverteilung über demselben in der Nähe der Erdoberfläche für einen Zeitpunkt bekannt ist. Ein Nachteil dagegen besteht vorläufig in der Unkenntnis der Größe der Druckänderung und dem Zeitraum, bis zu dem sie sich ausgebildet hat. Vielleicht ergeben sich hierfür Anhaltspunkte aus dem bisher gesammelten Beobachtungsmaterial. Zwar könnte man versuchen, auf dem Wege der Rechnung die aus den Zustandsverschiedenheiten in der Atmosphäre sich entwickelnden Strömungen und die Zustandsänderungen an den einzelnen Orten zu finden. Es lassen sich dazu wohl die Differentialgleichungen aufstellen, selbst wenn diese mit den gegenwärtigen Hilfsmitteln der Analysis integriert werden könnten, müßten zu ihrer Auswertung die Zustandsverteilung in der ganzen Atmosphäre und längs der Erdoberfläche, die eine sehr bedeutsame Rolle spielt, sowie die Wärmezufuhr und -entziehung bekannt sein. Man kann jedoch auch andere, nicht auf die strenge Mechanik der Flüssigkeiten gegründete Methoden versuchen und sie trotz ihres hypothetischen Gewandes erproben. Eine solche Methode hat F. M. Exner

angewandt, um die Druckänderung an einem Ort rechnerisch zu ermitteln. Das interessante der Methode besteht darin, daß sie auch von den Zustandsverschiedenheiten längs der Erdoberfläche Gebrauch macht und unmittelbar die Druckänderung von den Solenoiden, die auf der Erdoberfläche endigen, berechnet. Exner stellt für die zeitliche Druckänderung um Ort die Formel [1]) auf:

$$5)\qquad \frac{\partial p}{\partial t} = -C\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\right)$$

worin C eine Constante ist. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit $\frac{1}{p}$, so folgt:

$$6)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\lg(p) = -C\left(\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial glp}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial lgp}{\partial y}\right)$$

Die Zirkulationsbeschleunigung für eine Kurve, die sich mit der Luft bewegt und im Zeitpunkt der Beobachtung das Gebiet, für welches die zeitliche Druckänderung nach der obigen Gleichung gefunden werden soll, ist jedoch zu bestimmen aus:

$$7)\qquad \frac{D}{dt}\oint u\delta x + v\delta y = J\oint TdS$$

Wie leicht zu zeigen, kann man an stelle von $\oint TdS$ auch setzen:

$$8)\qquad J\oint TdS = -R\oint T\frac{dp}{p}$$

Werden beide Kurven in Flächenintegrale verwandelt, so ergibt sich die Beziehung:

$$9)\qquad J\iint\left(\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial y}\right)dx\,dy$$
$$= -R\iint\left(\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial lgp}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial lgp}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Der Ausduck unter dem rechtsstehenden Integral ist nun bis auf die Konstante C identisch mit demjenigen in Gl. 6). Verwandelt man auch das Integral der Zirkulationsbeschleunigung in ein Flächenintegral und setzt:

$$2\,\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

---

[1]) Enzyklop. d. Math. Wiss. VI. 3. p. 228.

so folgt:

$$10)\ 2\frac{D}{dt}\iint\zeta\, dx\, dy = -R\iint\left(\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial lgp}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial lgp}{\partial y}\right) dx\, dy$$

also für ein Flächenelement dx dy ist zu setzen:

$$2\frac{D}{dt}(\zeta\, dx\, dy) = +R\left(\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial lgp}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial lgp}{\partial y}\right) dx\, dy$$

und mit Rücksicht auf Gl. (6) erhält man

$$10^{1} \qquad \frac{\partial lgp}{\partial t} dx\, dy = -2\frac{C}{R}\frac{D(\zeta\, dx\, dy)}{dt}$$

oder, mit Vernachlässigung der Querschnittsänderung des Solenoides, einfacher:

$$11) \qquad -\frac{\partial lgp}{\partial t} = 2\frac{C}{R}\frac{D\zeta}{dt}$$

ζ kann mit dem Vorzeichen + oder —, je nach der Richtung der Winkelgeschwindigkeit, auftreten. Damit ein zeitliches Druckwachstum ausgedrückt wird, müßte $\frac{D\zeta}{dt}$ negativ sein, entsprechend einem Solenoid, dessen Vektor B vom Luftraum gegen die Erdoberfläche gerichtet ist.

Die Exnersche Hypothese führt, wie Gl. 11) zeigt, auf die Annahme zurück, daß die zeitlichen Änderungen des Druckes proportional sind den augenblicklichen Wirbelbeschleunigungen um vertikale Wirbelachsen. Sollte sich die von Exner aufgestellte Gleichung auch mechanisch begründen lassen, so wäre damit ein beachtenswertes Resultat gewonnen. Für die Druckänderungen kommen überwiegend die Solenoide mit Achsen parallel zur Horizontalen in Betracht; sie allein können die Massenumlagerung erzielen. Wirbel mit vertikalen Achsen, die aus der Wirksamkeit gleichgerichteter Solenoide hervorgehen, erreichen durch Zentrifugalwirkungen ebenfalls Druckänderungen, doch stets nur in einem Sinne, der Druckabnahme, daher lassen sich die Gleichung 6) und die aus ihr direkt gewonnene Beziehung 11) mechanisch nicht begründen, sofern man nicht annehmen will, daß die Wirbelbeschleunigung um die vertikale stets proportional ist zu derjenigen um eine horizontale Achse. Für diese Annahme erscheint kein Grund angebbar.

Übrigens umfaßt die Gl. 6) nur sehr spezielle Fälle. Um dies zu zeigen, sei mit dem Flächenelement $\partial x\ \partial y$ multipliziert und die Integration über eine Fläche ausgedehnt, die von einer Isobare

umrandet wird. Da das rechtsstehende Flächen-Integral ersetzt werden darf durch das gleichwertige Linien-Integral $-R\oint\frac{Tdp}{p}$ und die Integration längs einer Isobare ausgeführt werden soll, so ist, weil hierbei

$$-R\oint\frac{Tdp}{p}=0$$

auch:

$$\iint\frac{\partial p}{\partial t}\,\delta x\,\delta y=0.$$

Damit diese Gleichung mit 5) in Einklang steht, ist notwendig, daß die Isobare ohne Änderung des Flächeninhaltes des von ihr umgebenen, bewegten Gebietes, sich fortbewegt. Es erhalten dann gleiche überstrichene Flächen gleiche aber teils positive, teils negative Druckänderungen. Derartige Solenoide, die mit beiden Enden die Erdoberfläche treffen, kommen auch in stationären Depressions- und Hochdruckgebieten vor. Allein die nach Gl. 11) zu erwartenden Druckänderungen finden nicht statt. Ebensowenig umfaßt die Gl. 5) die Fälle, wo eine Druckvertiefung oder -Zunahme stattfindet. Im ersten Fall ist: $\iint\frac{\partial p}{\partial t}\,\partial x\,dy$ negativ im zweiten positiv. Daher kann von einer allgemeinen Gültigkeit der in Gl. 15) ausgedrückten Hypothese keine Rede sein. Die von Exner weiter gegebene Begründung, daß der Druck an einem Orte steigt, wenn kalte Luftmassen an die Stelle von warmen gelangen, scheint auf den ersten Anblick sehr plausibel, gilt aber im allgemeinen nicht, wie man sich leicht aus der Vorstellung einer gleichmäßigen Translation der Isentropen- und Isothermenflächen herleiten kann. Damit Druckänderungen überhaupt zustande kommen, müssen Expansion und Kompression statthaben, dadurch gehen die Keile der Isentropen- und Isothermenflächen relativ auseinander (Fall der Expansion) oder ineinander (Kompression). Wenn auf den Vorderseiten der Zyklonen der Druck sinkt, während sie gebildet werden, so ist dies der Erfolg der Expansion, und der das Vordringen der Keile oder Sättel auf den Rückseiten der Zyklonen begleitende Druck anstieg, ist nicht das Resultat der Bewegung allein, sondern der gleichzeitig vorsichgehenden Kompression, wobei die Isothermenflächen weniger fortgetragen

werden durch die Strömung als die Isentropenflächen, auf deren Bewegung die adiabatischen Expansions- und Kompressions-Vorgänge ganz ohne Einfluß sind.

§ 7. Beispiele.

Im folgenden sollen Wetterkarten als Diskussions-Beispiele benutzt werden, um zu zeigen, daß sich die von einem Tag auf den anderen erfolgenden Änderungen unschwer aus der Theorie erklären lassen, sobald die dargestellten Vorgänge hinreichend ausgeprägt sind.

Die Wetterkarten sind verkleinerte Kopien der von der Deutschen Seewarte herausgegebenen Originale. Um eine größere Übersicht zu geben, wurde eine Serie von aufeinander folgenden Wetterkarten zusammengestellt. Sie umfassen den Zeitraum vom 1. bis 10. Dezember 1910. Aus den Angaben über Druck, der von der Dampfspannung befreit wurde, und der Temperatur, wurde die Entropie berechnet und danach die Entropielinien gezeichnet. Da die Karten alles Wesentliche graphisch zum Ausdruck bringen, kann von der Detail-Schilderung der Sachlage Abstand genommen werden.

10. Dez. Die Wellenform der Entropielinien kennzeichnet die Sättel und Mulden der Isentropenflächen. Das Luftdruckminimum der Hauptdepression liegt westlich der britischen Inseln in dem Muldengebiet, die barometrischen Maxima befinden sich in Sätteln, die von den Isentropenflächen durch Überwölbung der bezüglichen Gebiete gebildet werden.

Die Strömung in der Mulde folgt im Mittel der Strömung der Scheidelinie durch die Isentropen. Eine gegen die östlich davor liegenden Schnittlinien der Isentropenflächen mit den Grenzflächen gerichtete Strömung ist nicht vorhanden, nach dort kann sich die Einfaltung der Flächen $S = \text{const.}$ nicht fortsetzen, daher auch keine Tendenz zu fallendem Druck. Das arktische Hochdruckgebiet im Verein mit der östlich sich anschließenden Depression bewirkt das Vordringen eines Keiles in südlicher Richtung, dabei können die von den Isothermen- und Isentropenflächen gebildeten Keile in einander gehen, wobei zugleich eine Kompression statthat. In der südlichen Verlagerungs-Richtung des Keiles kann daher keine Druckabnahme, dagegen wohl aber eine Druckzunahme vorsichgehen. Durch den

eindringenden Keil wird die westliche Depression getrennt von der kleinen in nordöstlicher Richtung; mit dem begleitenden Druckanstieg in der Bewegungs-Richtung des Keiles ist auch die Verlagerung des Hochdruckgebietes angedeutet, dasselbe folgt dem Keil, daher kann sich die Hauptdepression nach NW ausdehnen. In der Richtung der horizontalen Fortsetzung der Stromachse erscheint eine Expansion als möglich, wobei sinkender Druck sich einstellen müßte. In der Karte vom 11. Dez. zeigen sich die Veränderungen in der Druckverteilung ganz im Einklang mit den mutmaßlichen. Der Druck in der Nähe von Island sank, stieg dagegen über dem nördlichen Skandinavien. Hätte sich die Depression als ganzes nicht verflacht, so wären die Druckänderungen bedeutender gewesen. Aus der Lage der Stromachse in der Hauptdepression am 11. Dez. zu schließen, verläuft die Expansions-Strömung hauptsächlich nach Norden mit einer schwachen, nach NW gerichteten Komponente und zeigt bei dem Fehlen starker westöstlicher Luftströmungen an, daß die Zyklone sich mehr nach der erstgenannten Richtung ausdehnen kann. Am Ostrand der Depression herrscht eine Kompressions-Bewegung über Skandinavien, in der Fortsetzung der Strömung nach Süden muß die sattelförmige Faltung der Isentropenflächen weiter schreiten und durch die seitlich verdrängten Luftmassen mit zur Bildung einer Mulde beitragen.

Am 12. Dezember zeigt die Karte eine Verlagerung der Zyklone nach NWlicher Richtung, begleitet von einem weiteren Zurückweichen des Hochdruckgebietes, das nun an seiner Westseite die Expansions-Strömung durch Abgabe von expansionsfähigen Luftmassen gegen andere von niederer Entropie unterstützen kann. Die Faltung der Isentropenflächen über Skandinavien hat sich verstärkt, während gleichzeitig eine schwache Mulde ausgebildet wurde, deren Expansionswirkung in dem kleinen, nur an der Deformation der Isobaren erkenntlichen Teiltiefe in Erscheinung tritt. In der Lage des Expansionsgebietes der Hauptdepression ist wenig Änderung zu konstatieren, die Strömung hat im N und NW unverkennbar an Stärke abgenommen, während sie am Südrande der Zyklone etwas stärker ausgebildet ist als tags zuvor. Mit dieser Stromverteilung im Zusammenhang steht vermutlich die Verlagerung des Minimums nach Süden und seine gleichzeitige Vertiefung am folgenden Tage, dazu war eine Zufuhr von Luftmassen höherer Entropie notwendig, die,

wie die Karte zeigt, auch vorhanden ist. Anzeichen, die auf eine Verlagerung der Faltung nach Osten hindeuten, wie z. B. stärkere Luftströmungen aus Westen, sind nicht vorhanden. Die sekundäre Faltung über der Ostsee und Rußland hat keine nennenswerte Wirkung auf die Druckverteilung ausgeübt.

Die neue Phase, welche die kommende Verlagerung der Zyklone erkennen läßt, beginnt am 15. Dez. Über Süd-England hat sich ein Teiltief gebildet, verursacht durch die stärkeren Entropie-Unterschiede nach NW. Die Expansionsströmung zeigt einen überwiegend west-östlichen Verlauf, sie ist gegen die Kanten der Isentropenflächen am Ostrande der Zyklone gerichtet und weist damit auf die Möglichkeit einer nach dieser Seite beginnenden Einfaltung hin. Die vollständige Klärung der Sachlage tritt am 16. Dez. in Erscheinung. Das Teiltief von tags zuvor hat sich weiter vertieft, ein Umstand, der wohl vermutet werden konnte, allein bei den spärlichen Angaben über die Zustandsverteilung über dem Gebiete am Rande der Karte zweifelhaft erscheinen mußte. Die jetzt starke west-östliche Strömung, die auf eine entsprechende Orientierung der Solenoide im Raume schließen läßt, erzwingt die Einfaltung nach östlicher Richtung. Am 17. Dez. erreicht nunmehr das Minimum die Nordsee und schreitet, der Stomachse des Muldengebietes parallel, nach Südskandinavien fort. Von nun ab gestalten sich die Vorgänge sehr übersichtlich. Der auf der Rückseite des Minimums nach südlicher Richtung vordringende Keil führt dort zu einem Druckanstieg und zu einer Verstärkung des Hochdruckgebietes, das nun durch Unterstützung der Rückseitenströmung dazu beiträgt, den Expansionsstrom der Zyklone gegen die Alpen abzuschnüren. Wie die Karte vom 18. Dez. sehr deutlich erkennen läßt, ist die Expansionsströmung bedeutend abgeschwächt, und parallel damit ging die Verflachung der Zyklone, welche den zu ihrer Unterhaltung notwendigen Bedarf expansionsfähiger Luftmassen nicht mehr in vollem Umfange zugeführt erhält. Die Zyklone bewegte sich weiter und zwar in der Richtung der früher gebildeten sekundären Faltung der Isentropenflächen. Danach wäre zu vermuten, daß die vorbereitete schwache Mulde unter den obwaltenden Bedingungen der Zustandsverteilung der Fortbewegung des Minimums die günstigsten Bedingungen bot.

Die Diskussion der einzelnen Vorgänge im Zusammenhang mit

entfernter liegenden atmosphärischen Störungen wird durch die geringe räumliche Übersicht, welche die Wetterkarten gewähren, erschwert, zum Teil unmöglich, insofern die großen atmosphärischen Störungen der Zyklonen ihre vollständigste Ausbildung in großem Maßstabe wesentlich über dem nördlichen Teil des atlantischen Ozeans erhalten, während sie in dem von den Wetterkarten umschlossenem Gebiete mit den Endphasen ablaufen. Um daher die Wechselwirkungen zwischen entfernt liegenden atmosphärischen Störungen und den damit zusammenhängenden Einfluß auf die gesamte Wetterlage zu übersehen, bedarf es notwendig ausgedehnter gleichzeitiger Beobachtungen über den nördlichen Ozean und den angrenzenden Kontinenten. Hierdurch ließe sich ein ziemlich vollständiges Bild der Zustandsverteilung in der Atmosphäre über einem großen, der Erdoberfläche nahen Gebiete erhalten, aus der auch die Gesetzmäßigkeiten der langsam sich vollziehenden Änderungen sich unschwer ermitteln lassen, welche die Unterlage zu einer Wetterprognose auf längere Zeit bilden, soweit hierunter nur der Umbildungsprozeß gegebener Wetterlagen in bestimmte aufeinanderfolgende Wettertypen von wohlausgeprägtem Charakter verstanden wird.

§ 8. Einfluß des Wasserdampfes.

Die Feldgleichungen sind entwickelt worden unter der Annahme, daß das Boyle-Mariottesche Gesetz mit genügender Näherung die in der Atmosphäre vorkommende Zustände darstellen läßt. Der atmosphärischen Luft ist nun stets Wasserdampf beigemischt, infolgedessen genügen zur Angabe ihres Zustandes nicht mehr die auf trockene Luft bezüglichen Parameterwerte des Druckes und der Temperatur, es bedarf noch der Angabe der Wasserdampfmenge in der Masseneinheit des Gemisches. Die allgemeine Theorie wird indessen durch die Berücksichtigung des Wasserdampfgehaltes nicht beeinflußt, nur gestaltet sich die Auswertung des Ringintegrales $\oint vdp$ etwas umständlicher. Hierbei läßt sich eine Vereinfachung erzielen durch Trennung der Anteile der trockenen Luft und des Wasserdampfes an dem Felde. Dies soll an folgendem gezeigt werden.

Es bezeichne v das spezifische Volumen des Gemisches aus Luft und Wasserdampf. Dieser sei mit der Masse ϱ'' an der Masseneinheit des Gemisches beteiligt. Unter p' und p'' seien die Partialdrucke der trockenen Luft und des Wasserdampfes verstanden und ferner sei angenommen, daß der gasförmige Zustand desselben bis nahe an die Sättigungsgrenze durch das von Gesetz Boyle-Mariotte darstellbar ist.

Die Zustandsgleichung der trockenen, mit der Masse $(1-\varrho'')$ beteiligten Luft gibt für diese die Beziehung.

$$v\,p' = R\,(1-\varrho'')\,T \tag{1}$$

und für den Wasserdampf folgt:

$$v\,p'' = R'\,\varrho''\,T \tag{2}$$

R und R' sind die auf trockene Luft und Wasserdampf bezüglichen Gaskonstanten.

Nach dem Daltonschen Gesetz ist die Spannung p des Gemisches gegeben durch:

$$p = p' + p'' \tag{3}$$

Unter Berücksichtigung dieses Ausdruckes erhält man für das folgende Ringintegral die Gleichheit.

$$-\oint v\,dp = -\oint v\,dp' - \oint v\,dp'' \tag{4}$$

Nach Elimination des spez. Volumens erhält man aus 4).

$$-\oint v\,dp = -R\oint T\frac{dp'}{p'} - R'\oint \varrho''\,T\,\frac{dp''}{p''} \tag{5}$$

Aus den Zustandsgleichungen 1) und 2) für trockene Luft und gasförmigen Wasserdampf ergibt sich unmittelbar der Zusammenhang zwischen den Partialdrucken und den Dichten ϱ' und ϱ'':

$$\frac{p''}{p'} = \frac{R'}{R}\,\frac{\varrho''}{(1-\varrho'')}$$

und hieraus durch differentieren:

$$dp'' = \frac{R'}{R}\left\{\frac{\varrho''}{(1-\varrho'')}\,dp'\right\} + \frac{R'}{R}\,p'\left\{\left(\frac{d\varrho''}{1-\varrho''} + \frac{\varrho''\,d\varrho''}{(1-\varrho'')^2}\right)\right\} \tag{6}$$

Für $\dfrac{dp''}{p''}$ erhält man die Gleichung:

$$\frac{dp''}{p''} = \frac{dp'}{p'} + \frac{d\varrho''}{\varrho''\,(1-\varrho'')} \tag{7}$$

Wenn in das Linienintegral 5) anstelle von $\dfrac{dp''}{p''}$ die durch

7) ausgedrückte Beziehung eingesetzt wird, folgt:

$$8)\quad \begin{aligned} -\oint v\,dp &= -R\oint (1-\varrho)\,T\,\frac{dp'}{p'} \\ &\quad -R^1\oint \varrho''\,T\,\frac{dp'}{p'} = R'\oint T\,\frac{d\varrho''}{\varrho''} \end{aligned}$$

Das Verhältnis der Gaskonstanten $\frac{R'}{R}$ ist 1,625, damit lassen sich die beiden ersten Integrale der rechten Seite vereinigen, die leichte Umrechnung ergibt Integrale:

$$9)\quad -\oint v\,dp = -R\oint (1+0{,}625\,\varrho'')\,T\,\frac{dp'}{p'} - R'\oint T\,\frac{d\varrho''}{\varrho''}$$

Mit Benutzung der Beziehung:

$$T\,d\,(\lg(1-\varrho'')) = d\,[T\lg(1-\varrho)] - \lg(1-\varrho'')\,dT$$

erhält man aus 9) die folgende Gleichung:

$$10)\quad \begin{aligned} -\oint v\,dp &= -R\oint (1+0{,}625\,\varrho'')\,T\,\frac{dp'}{p'} \\ &\quad + R'\oint \lg\,(1-\varrho'')\,dT \end{aligned}$$

Für lg $(1-\varrho'')$ kann, da ϱ'' stets klein, die Reihenentwickelung gesetzt werden:

$$\lg(1-\varrho'') = -\varrho'' - \frac{1}{2}\varrho''^{\,2}$$

und in erster Näherung erhält man mit lg $(1-\varrho'') \sim -\varrho''$ anstelle von 10)

$$-\oint v\,dp = -R\oint (1+0{,}625\,\varrho'')\,T\,\frac{dp'}{p'} - R'\oint p''\,dT$$

Der Einfluß des Wasserdampfes wird also dargestellt durch:

$$-0{,}625\,R\oint \varrho''\,T\,\frac{dp'}{p'} - R'\oint \varrho''\,dT$$

Zum Vergleich dessen mit dem Anteil der Zirkulationsbeschleunigung, die aus den Zustandsverschiedenheiten der trockenen Luft hervorgeht, kann man geeignete Integrationswege vorschreiben. Die Kurve befinde sich mit zwei Zweigen auf zwei Isentropenflächen, mit den beiden andern sie ergänzenden auf zwei Isothermenflächen. Auf den Isothermenzweigen sei ϱ'' const. und zwar $\varrho'' = \varrho_2''$ auf $T_2 =$ const. $\varrho'' = 0$ auf $T_1 =$ const. Längs den Adiabaten S_1 und S_2 nehme der Wasserdampf gleichmäßig bis zu Null ab. Die Entropiedifferenz sei (in absol. Einheiten) $= 0{,}005$ und

$\varrho_2'' = 0{,}02$, entprechend einen Wasserdampfgehalt von 20 gr. in dem kg des Gemisches.

Die Integration ist längs den einzelnen Zweigen der Kurve auszuführen:

1) längs der Isotherme: $T_2 := 290$

$$0{,}625 \varrho'' R \int T_2 \frac{dp'}{p'}$$
$$= 0{,}625 \varrho'' (T_2 \, \varDelta \, S) \, J = 0{,}018 \, . \, J.$$

2) auf der Isentrope S_2 ist:

$$R \int_{T_2}^{T_1} T_2 \frac{dp'}{p'} = J c_p \int dT$$

da für

$$dS = 0$$

$$J c_p \, dT = RT \frac{dp'}{p'}$$

und weil dasselbe Temperatur-Intervall zweimal, auch S_2 und S_1, hier entgegengesetzt, durchlaufen wird, während ϱ'' auf beiden Zweigen gleichartig variiert, so verschwindet der Beitrag des Wasserdampfes auf diesen Zweigen.

3) bei T_1 ist $\varrho'' = 0$. Der Anteil zu dem Integral auf diesem Zweige ist Null.

Für das ganze Integral ist demnach der zugehörige Wert gegeben durch den Anteil auf dem ersten Integrationsweg:

$$\text{oder:} \; - 0{,}625 \, R \int \varrho'' \, T \frac{dp'}{p'} = 0{,}018 \, J.$$

Der Beitrag von dem 2. Integral verschwindet unter diesen Umständen.

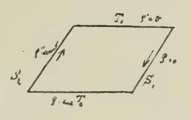
$$\oint \varrho'' \, dT' = 0.$$

Die Temperaturdifferenz $T_2 - T_1$ betrage 20^0, für $\varDelta \, S = 0{,}005$ erhält man daher den auf trockene Luft bezüglichen Anteil aus

$$J \varDelta T \, . \, \varDelta S = 0{,}1 \, . \, J$$

Unter den genannten Umständen beträgt der Wasserdampfbeitrag zu der Zirkulationsbeschleunigung 20% dessen der trockenen Luft.

Es können aber wesentlich größere Wirkungen des Wasserdampfes zustandekommen, wenn er längs der Adiabaten ungleich verteilt ist, etwa auf der einen sehr stark vertreten ist und auf der anderen verschwindet. Um dies an einem extremen Fall zu zeigen, sei folgende, aus der Figur ersichtliche Verteilung angenommen.



$$\left.\begin{array}{l} \varrho_2'' \text{ auf } T_2 \text{ sei } = 0{,}02 \\ \varrho'' \text{ auf } S_1 \text{ sei } = 0{,}01 \end{array}\right\} \text{Mittelwert}$$

Entropie und Temperaturen wie in dem vorhergehenden Beispiel gerechnet: man erhält für den Zweig auf T_1 wieder:

$$-0{,}625\varrho_2''\, T_2 \int_1^2 \frac{dp}{p_1} = 0{,}018\,.\,J$$

Für die adiabatischen Zweige dagegen:

$$\text{auf } S_2 := -0{,}625\, \varrho\, c_p \int_1^2 dT = 0{,}029\, J \qquad \Delta T = 20^0$$

auf S_1 wegen $\varrho'' = 0$ verschwindet der Ausdruck.

Für das Integral $\int \varrho'' dT$ kommt nur der eine Isentropenzweig in Betracht, man findet:

$$-R' \oint \varrho'' dT = -R'\,.\,0{,}01\,.\,20$$

nun ist:

$$R' = 1{,}625\, R = 1{,}625\,(c_p - c_v)\, J = 1{,}625\,.\,0{,}067\,.\,J$$

und hiermit:

$$-R' \varrho \int_2^1 dT = 0{,}02\,.\,J$$

Unter diesen in der Natur wohl kaum realisierten günstigen Bedingungen würde der Beitrag des Wasserdampfes zu der Zirkulationsbeschleunigung der Luft unter den angegebenen Werten der Entropie- und Temperaturdifferenz ca. 65—70% derjenigen aus den Zustandsverschiedenheiten der Luft betragen.

In den winterlichen Zyklonen der höheren Breiten dürfte der direkte Einfluß des Wasserdampfes höchstens mit 15% an der Zirku-

lationsbeschleunigung beteiligt sein. Wie sich aber die Sachlage beim gesättigten, der Kondensation nahen Wasserdampf verhält, ist schwer zu übersehen, es findet jetzt eine Massenänderung statt, oder ist möglich, und daher kann das Integral über die Zustandsverteilung nicht ausgewertet werden, es wäre noch die Entropiezunahme der Luft infolge der Wärmezufuhr bei der Kondensation des Wasserdampfes zu berücksichtigen.

Anhang.

Über die Berechnung der Entropie.

Die Entropieänderung einer Masseneinheit Luft während einer unendlich kleinen Zustandsänderung wird in den Zustandsparametern p und T ausgedrückt durch:

$$1) \qquad dS = c_p \frac{dT}{T} - dR \frac{dp}{p}$$

Findet der Übergang zwischen den endlichen Grenzen des Zustandes statt, so ergibt die Integration von 1)

$$S - S_1 = (c_p \lg T - AR \lg p) - (c_p \lg T_1 - d\,R \lg p_1)$$

Um die so definierte Entropiedifferenz allgemein benützen zu können, wird die obere Grenze, p T als veriabel, die untere, p_1 und T_1 dagegen als fest betrachtet, wobei über diese Anfangswerte für die Zwecke der Rechnung passend verfügt werden kann. Es wurden den Tabellen und den in den Beispielen angegebenen Entropiewerten die Anfangswerte $T = 1^0$, $p = 1\ \mathrm{gr\ cm^{-1}\,sec^{-2}}$ zu Grunde gelegt, infolgedessen verschwindet das zweite Glied der rechten Seite, und die Entropiedifferenz gegen diesen aus Gründen der einfacheren Rechnung gewählten Anfangswert wurde als Entropie bezeichnet und durch S dargestellt. Da die absolute Temperatur in den Ausdruck der Entropie eingeht, erscheint es angebracht, auch den Druck in physikalischen Einheiten auszuwerten. Danach berechnet sich der Druck aus gegebenem Barometer-Stande nach:

$$p = \varrho_0\, g.\, B.$$

wobei ϱ_0 die Dichte des Quecksilbers bei 0^0 Celsius, B den Barometerstand in cm und g die Schwerebeschleunigung bedeuten. Infolge der Veränderlichkeit von g mit der geographischen Breite führt man einen Normalwert ein und trägt der Abweichung durch ein Korrektions-Glied Rechnung. Praktisch ist dieses bedeutungslos, da

die Temperaturangaben weit ungenauer und der dadurch bewirkte Fehler der Entropie viel größer ist als derjenige infolge des ungenauen Wertes von g. $^1/_{10}{}^0$ Fehler in der Temperatur kommt durchschnittlich dem eines Druckunterschiedes von 1 mm Hg gleich. Die Temperaturunsicherheit ist jedoch bedeutend größer als $^1/_{10}{}^0$ C; es hat demnach keinen Zweck, genauere als den Temperaturangaben entsprechende Zahlwerte der Entropie zu benützen, vor allem brauchen auch kleinere Druckdifferenzen als 1 mm Hg nicht berücksichtigt zu werden. Die beigefügten Tabellen geben die Zahlwerte der Entropie für trockene Luft für das Druckintervall von 700 – 780 mm Hg zwischen den Temperaturen — 30° C und + 30° C.

Verschiedene, wenn auch nicht ausschlaggebende Schwierigkeiten ergeben sich, wenn zur Darstellung der Entropieverteilung die Daten über Druck und Temperatur den Wetterkarten entnommen werden müssen, wie das in den behandelnden Beispielen dieser Arbeit der Fall war. Der Druck wird auf das Meeresniveau reduziert, die Temperaturangaben jedoch nicht, daher spiegeln diese bis zu einem gewissen Grade die Niveauunterschiede der Beobachtungs-Stationen wider. Das Bild der Zustandsverteilung wird jedoch nur dann ein möglichst genaues sein, wenn sowohl Druck als auch Temperatur auf dasselbe Niveau bezogen werden. Der Temperatur-Reduktion stehen erhebliche Bedenken entgegen, das Gesetz der Temperaturänderung in der Vertikalen ist kein einheitliches, der Temperaturgradient ist bald größer bald kleiner, außerdem kommen Temperatur-Inversionen vor. Genau genommen verlangt die Temperatur-Reduktion die Lösung eines kaum zu bewältigenden Problemes. Es sollen anstelle des Festlandes mit seiner verschiedenartigen Beschaffenheit und Konfiguration Luftmassen gedacht und deren Temperaturzustand dargestellt werden. Die Schnitte der Isothermenflächen mit dem Meeresniveau würden dann die gesuchte Temperaturverteilung in diesem ergeben und das Bild der Druckverteilung ergänzen. Unter Verzichtleistung auf größere Genauigkeit und eingedenk der stets noch vorhandenen Unsicherheit kann man die Temperatur für geringe, einige hundert Meter nicht übersteigende Höhenunterschiede nach einem plausiblen empirischen Gesetz reduzieren. In dieser Arbeit wurde die Temperatur-Reduktion mit 0,7 $\frac{\text{Grad}}{100\,\text{m}}$ bis zu Höhen von 500 m ausgeführt und von

den Entropiewarten nur die 3ten Dezimalen berücksichtigt. Mit dieser angestrebten Genauigkeit ist die Entropieverteilung oder was auf dasselbe hinauskommt, die Verteilung der potentiellen Temperatur in den Beispielen und den Wetterkarten dargestellt.

Zusammenfassung.

Unter Annahme trockener Luft ist die Zustandsverteilung in der Atmosphäre durch zwei Flächenscharen ausreichend charakterisiert. Als Hilfsmittel zur Untersuchung der Dynamik und Thermodynamik der Luftbewegungen eignen sich diese Flächenscharen prinzipiell; die Wahl der Zustandsparameter, deren Verteilung durch die Anordnung der bezüglichen Flächen in der Atmosphäre wiedergegeben wird, steht zunächst frei. Als besonders zweckmäßig erweisen sich die Parameter: Temperatur-Entropie, weil sie in zugleich sehr anschaulicher Weise durch ihre gegensätzliche Neigung gegen die Erdoberfläche die Notwendigkeit ihrer wechselseitigen Durchdringung erkennen und die Zusammenhänge der Bewegung mit diesen Schnitten, sowohl vom Standpunkt der Dynamik wie von dem der Thermodynamik, verständlich erscheinen lassen. Der Anschluß an die Dynamik wird durch die Zirkulations-Beschleunigung vollzogen, diese selbst erhält eine thermodynamische Nebenbedeutung dadurch, daß ihre Berechnung aus den Zustandsverschiedenheiten auf die Anwendung des II. Hauptsatzes zurückgreifen muß. Auch die Frage nach der Ursache aller natürlichen atmosphärischen Bewegungen wird dadurch in andere Beleuchtung gerückt und der Beantwortung zugänglich gemacht. Danach ist eine Quelle der Luftbewegung ein Wirbelfeld von Beschleunigungen, das aus der gegenseitigen Durchdringung der Isentropen- und Isothermenflächenscharen hervorgeht. Die Richtung, in der die Zirkulationsbeschleunigung wirksam ist, ergibt sich in einfacher Weise aus der Betrachtung eines positiven Carnot'schen Prozesses. Sie wird deshalb zu einer bestimmten, weil die entgegengesetzte Bewegungs-Richtung den Ablauf einer negativen Carnot'schen Kreisprozesses verlangen würde, der äußere Einwirkungen voraussetzt.

Dem Nachweis der Wirksamkeit der Wirbelbeschleunigung in

den Bewegungsvorgängen der Atmosphäre wurden einige leicht zu übersehende Fälle der Solenoidverteilung und ihrer Wirkung als Unterlage vorangestellt. Besonders wichtig erschien die aus zwei Solenoiden mit entgegengesetzt gerichtetem Vektorfluß herrührende Anordnung der Beschleunigung, weil sie das Hilfsmittel zur Elimination des Einflusses einer starren Begrenzungsfläche, das Spiegelungsverfahren, aufzeigt. Von diesem wird auch bei schichtförmig verteilten Solenoiden Gebrauch gemacht und die Fälle untersucht, wo die Isentropenflächen die Erdoberfläche schneiden und Solenoide zwischen sich einschließen. Die Untersuchung der Bewegung dieser keilförmigen Gebilde gab Aufschluß über die Natur der die Zyklonen zusammensetzenden Luftströmungen und lieferte über die Entstehungsart der großen atmosphärischen Störungen bemerkenswert einfache Aufschlüsse, die um so wichtiger erscheinen, als die Folgerungen der Theorie in dem tatsächlichen Ablauf der Erscheinungen vollkommen zutreffen und in der Anordnung der Isentropenlinien, die auf der Erdoberfläche die Keilgrenzen repräsentieren, sich überaus leicht nachweisen lassen. Aus dem geforderten und mit der Erfahrung übereinstimmenden Verhalten der Luftströmungen in Zyklonen ergeben sich als ein charakteristisches Merkmal derselben das Auftreten zweier Ströme, dem Expansions-Strom, der vom Rand der Depression nach dem Zentrum sich erstreckt und jenseits desselben, in dessen Nähe, die angrenzenden Luftschichten niederer Entropie in der Richtung seiner Stromaxe überlagert, wo sich die Expansion fortsetzt. Seine Strombahn an der Erdoberfläche ist durch eine muldenförmige Ausbiegung der Isentropenflächen gekennzeichnet, in dem eine aufwärtsgerichtete, wenn auch schwache, Beschleunigung und Bewegung vorhanden ist. Das Gebiet des Kompressions-Stromes ist überwölbt von den Isentropenflächen, in ihm vollzieht sich die Rückseiten-Strömung, vermutlich in einer Art schichtweisen Abgleitens kalter Luftmassen nach tieferem Niveau, sie breiten sich längst der Erdoberfläche aus. Die mancherseits vertretene Ansicht, daß in den Zyklonen eine allseitige Einströmung mit zentralem Abfluß stattfindet, wird hierdurch verlassen, eine derartige Strömung ist in den Zyklonen unter der vorhandenen Zustandsverteilung physikalisch unmöglich. Ebenso wird die Unterscheidung der Zyklonen nach der Temperatur ihrer Zentra eingeschränkt, weil sie keine Rücksicht nimmt auf die adiabatische Abkühlung

der Luft bei der Druckerniedrigung und somit keineswegs ein untrügliches Merkmal sein kann. Die Ursache des Einbruches kalter Luftmassen, des Kompressions-Stromes, auf den westlichen Seiten der Minima beider Hemisphären scheint die infolge der Erdrotation wirksame Coriolisbeschleunigung zu sein, wie in dieser Arbeit näher ausgeführt wurde. Als weitere durch die Beispiele aus den Wetterkarten gesicherte Ergebnisse fanden sich, daß die barometrischen Minima in den Mulden, die Kerne der Maxima in Sattelgebieten der Isentropenflächen eingelagert sind. Hingewiesen sei noch kurz auf den Zusammenhang des Entropietransportes mit der Druckänderung und Bewegung.

Die Zustandsverteilung in der an die Oberfläche angrenzenden Luftschicht gestattet eine weitgehende Übersicht über die physikalischen Beziehungen, nach denen die atmosphärischen Störungen ihren Ablauf nehmen. Vergegenwärtigt man sich, daß diese stets auf eine zu der horizontalen Ausdehnung fast verschwindende vertikale Schicht angewiesen sind, so darf die Erwartung ausgesprochen werden, daß aus der Zustandsverteilung und ihrer Änderung längs der Erdoberfläche sich wichtige Aufschlüsse über die Art des Umbildungsprozesses von Wetterlagen über großen Gebieten ergeben werden. Ein Versuch, die kurzfristige Wetterprognose auf eine physikalische Grundlage zu stellen, wurde gemacht; sind auch die gewonnenen Ergebnisse nicht höher zu veranschlagen, als die nach den bisherigen empirischen Regeln ohne physikalischen Einschlag, so bedeutete doch die Diskussion wirklicher Wetterkarten auf physikalischer Grundlage den Versuch einer neuen und noch ausbaufähigen Methode.

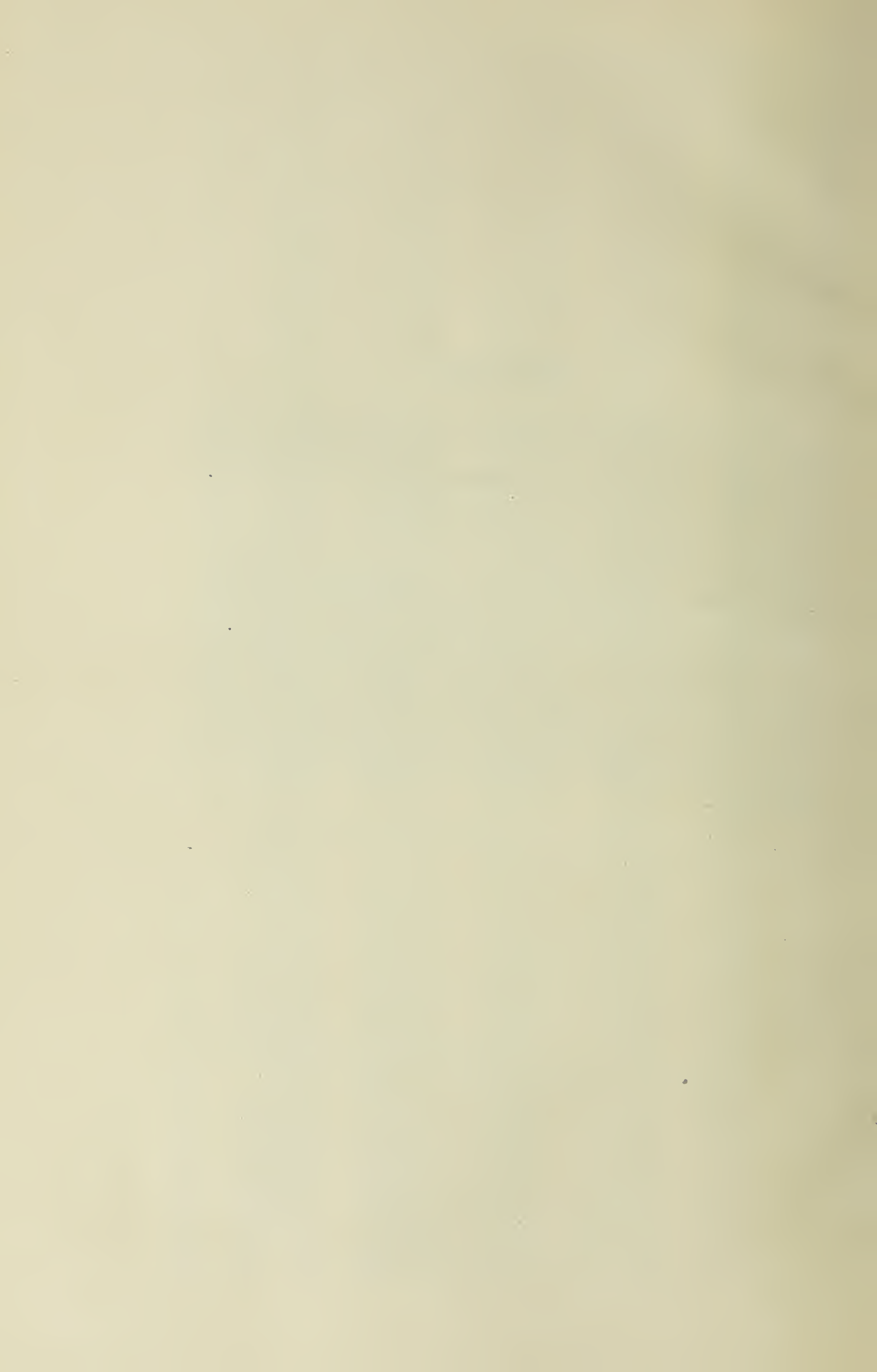
	700			705			710			715			720			725	
30	0.36295	97	30	0.36247	97	30	0.36198	97	30	0.36151	97	30	0.36104	97	30	0.36058	97
29	392	97	29	344	97	29	295	97	29	248	97	29	201	97	29	155	97
28	489	97	28	441	97	28	392	97	28	345	97	28	298	97	28	252	97
27	586	97	27	538	97	27	489	97	27	442	97	27	395	97	27	349	97
26	683	96	26	635	96	26	586	96	26	539	96	26	492	96	26	446	96
25	779	96	25	731	96	25	682	96	25	635	96	25	588	96	25	542	96
24	875	95	24	826	95	24	778	95	24	731	95	24	684	95	24	638	95
23	970	95	23	921	95	23	873	95	23	826	95	23	779	95	23	733	95
22	0.37064	95	22	0.37016	95	22	968	94	22	921	94	22	874	94	22	828	94
21	159	94	21	111	94	21	0.37062	94	21	0.37015	94	21	968	94	21	922	94
20	253	93	20	205	94	20	156	94	20	109	94	20	0.37062	94	20	0.37016	94
19	346	93	19	299	93	19	250	93	19	203	93	19	156	93	19	110	93
18	439	93	18	392	93	18	343	93	18	296	93	18	249	93	18	203	93
17	532	93	17	485	93	17	436	93	17	389	93	17	342	93	17	296	93
16	625	93	16	578	92	16	529	92	16	482	92	16	435	92	16	389	92
15	718	92	15	670	92	15	621	92	15	574	92	15	527	92	15	481	92
14	810	91	14	762	91	14	713	91	14	666	92	14	619	92	14	573	92
13	901	91	13	853	91	13	804	91	13	758	91	13	711	91	13	665	91
12	992	91	12	944	91	12	895	91	12	849	91	12	802	91	12	756	91
11	0.38083	90	11	0.38035	91	11	986	91	11	940	90	11	893	90	11	847	90
10	173	90	10	126	90	10	0.38077	90	10	0.38030	90	10	983	90	10	937	90
9	263	90	9	216	90	9	167	90	9	120	90	9	0.38073	90	9	0.38027	90
8	353	90	8	306	89	8	257	89	8	210	89	8	163	89	8	117	89
7	443	89	7	395	89	7	346	89	7	299	89	7	252	89	7	206	89
6	532	89	6	484	89	6	435	89	6	388	89	6	341	89	6	295	89
5	621	89	5	573	88	5	524	88	5	477	89	5	430	89	5	384	89
4	710	88	4	661	88	4	612	88	4	566	88	4	519	88	4	473	88
3	798	88	3	749	88	3	700	88	3	654	88	3	607	88	3	561	88
2	886	87	2	837	88	2	788	88	2	742	87	2	695	87	2	649	87
1	973	87	1	925	87	1	876	87	1	829	87	1	782	87	1	736	87
0	0.39060	87	0	0.39012	87	0	963	87	0	916	87	0	869	87	0	823	87
1	147	86	1	099	86	1	0.39050	86	1	0.39003	87	1	956	87	1	910	87
2	233	86	2	185	86	2	136	86	2	090	86	2	0.39043	86	2	997	86
3	319	86	3	271	86	3	222	86	3	176	86	3	129	86	3	0.39083	86
4	405	86	4	357	86	4	308	86	4	262	85	4	215	85	4	169	85
5	491	85	5	443	85	5	394	85	5	347	85	5	300	85	5	254	85
6	576	85	6	528	85	6	479	85	6	432	85	6	385	85	6	339	85
7	661	85	7	613	85	7	564	85	7	517	85	7	470	85	7	424	85
8	746	84	8	698	84	8	649	84	8	602	84	8	555	84	8	509	84
9	830	84	9	782	84	9	733	84	9	686	84	9	639	84	9	593	84
10	914	84	10	866	84	10	817	84	10	770	84	10	723	84	10	677	84
11	998	84	11	950	84	11	901	83	11	854	84	11	807	84	11	761	84
12	0.40082	83	12	0.40034	83	12	984	83	12	938	83	12	891	83	12	845	83
13	165	83	13	117	83	13	0.40067	83	13	0.40021	83	13	974	83	13	928	83
14	248	83	14	200	83	14	150	83	14	104	83	14	0.40057	83	14	0.40011	83
15	331	82	15	283	82	15	233	82	15	187	82	15	140	82	15	094	82
16	413	82	16	365	82	16	315	82	16	269	82	16	222	82	16	176	82
17	495	82	17	447	82	17	397	82	17	351	82	17	304	81	17	258	81
18	577	81	18	529	81	18	479	82	18	433	81	18	385	81	18	339	81
19	658	81	19	610	81	19	561	81	19	514	81	19	466	81	19	420	81
20	739	81	20	691	81	20	642	81	20	595	81	20	547	81	20	501	81
21	820	81	21	772	81	21	723	81	21	676	81	21	628	80	21	582	80
22	901	80	22	853	80	22	804	80	22	757	80	22	708	80	22	662	80
23	981	80	23	933	80	23	884	80	23	837	80	23	788	80	23	742	80
24	0.41061	80	24	0.41013	80	24	964	80	24	917	80	24	868	80	24	822	80
25	141	79	25	093	79	25	0.41044	79	25	997	79	25	948	80	25	902	80
26	220	79	26	172	79	26	123	79	26	0.41076	79	26	0.41028	80	26	982	80
28	299	79	27	251	79	27	202	79	27	155	79	27	108	79	27	0.41062	79
27	378	79	28	330	79	28	281	79	28	234	79	28	187	79	28	141	79
29	457	79	29	409	79	29	360	79	29	313	79	29	266	79	29	220	79
30	536		30	488		30	439		30	392		30	345		30	299	

	730			735			740			745			750			755	
30	0.36012	97	30	0.35966	97	30	0.35917	97	30	0.35870	97	30	0.35824	97	30	0.35779	97
29	109	97	29	0.36063	97	29	0.36014	97	29	967	97	29	921	97	29	876	97
28	206	97	28	160	97	28	111	97	28	0.36064	97	28	0.36018	97	28	973	97
27	303	97	27	257	97	27	208	97	27	161	97	27	115	97	27	0.36070	97
26	400	96	26	344	96	26	305	96	26	258	96	26	212	96	26	167	96
25	496	96	25	450	96	25	401	96	25	354	96	25	308	96	25	263	96
24	592	95	24	546	95	24	497	95	24	450	95	24	404	95	24	359	95
23	687	95	23	641	94	23	592	95	23	545	95	23	499	95	23	454	95
22	782	94	22	735	94	22	687	94	22	640	94	22	594	94	22	549	94
21	876	94	21	829	94	21	781	94	21	734	94	21	688	94	21	643	94
20	970	94	20	923	94	20	875	94	20	828	94	20	782	94	20	737	94
19	0.37064	93	19	0.37017	93	19	969	93	19	922	93	19	876	93	19	831	93
18	157	93	18	110	93	18	0 37062	93	18	0.37015	93	18	969	93	18	924	93
17	250	93	17	203	93	17	155	93	17	108	93	17	0.37062	93	17	0 37017	93
16	343	92	16	296	92	16	248	92	16	201	93	16	155	93	16	110	93
15	435	92	15	388	92	15	340	92	15	294	92	15	248	92	15	203	92
14	527	92	14	480	92	14	432	92	14	386	92	14	340	92	14	295	92
13	619	91	13	572	91	13	524	91	13	448	91	13	432	91	13	387	91
12	710	91	12	663	91	12	615	91	12	569	90	12	523	90	12	478	90
11	801	90	11	754	90	11	706	90	11	659	90	11	613	90	11	568	90
10	891	90	10	844	90	10	796	90	10	749	90	10	703	90	10	658	90
9	981	90	9	934	90	9	886	90	9	839	90	9	793	90	9	748	90
8	0.38071	89	8	0.38024	89	8	976	89	8	929	89	8	883	89	8	838	89
7	160	89	7	113	89	7	0.38065	89	7	0.38018	89	7	972	89	7	927	89
6	249	89	6	202	89	6	154	89	6	107	89	6	0.38061	89	6	0.38016	89
5	338	89	5	291	89	5	243	89	5	196	89	5	150	89	5	105	89
4	427	88	4	380	88	4	332	88	4	285	88	4	239	88	4	194	88
3	515	88	3	468	88	3	420	88	3	373	88	3	327	88	3	282	88
2	602	88	2	556	87	2	508	87	2	461	87	2	415	87	2	370	87
1	690	87	1	643	87	1	595	87	1	548	87	1	502	87	1	457	87
0	777	87	0	730		0	682	87	0	635	87	0	589	87	0	544	87
1	864	87	1	817	87	1	769	87	1	722	86	1	676	87	1	631	87
2	951	86	2	904	86	2	856	86	2	808	86	2	763	86	2	718	86
3	0.39037	86	3	990	86	3	942	86	3	894	86	3	849	86	3	804	86
4	123	85	4	0.39076	85	4	0.39028	85	4	980	86	4	935	85	4	890	85
5	208	85	5	161	85	5	113	85	5	0.39066	85	5	0.39020	85	5	985	85
6	293	85	6	246	85	6	198	85	6	151	85	6	105	85	6	0.39070	85
7	378	85	7	331	85	7	283	85	7	236	85	7	190	85	7	155	85
8	463	84	8	416	84	8	368	84	8	321	84	8	275	84	8	230	84
9	547	84	9	500	84	9	452	84	9	405	84	9	359	84	9	314	84
10	631	84	10	584	84	10	536	84	10	489	84	10	443	84	10	398	84
11	715	84	11	668	84	11	670	84	11	573	84	11	527	84	11	482	84
12	799	83	12	752	83	12	704	83	12	657	83	12	611	83	12	566	83
13	882	83	13	835	83	13	787	83	13	740	83	13	694	83	13	649	83
14	965	83	14	918	83	14	870	83	14	823	83	14	777	83	14	732	83
15	0.40048	82	15	0.40001	82	15	953	82	15	906	83	15	850	82	15	815	82
16	130	82	16	083	82	16	0.40035	82	16	988	82	16	942	82	16	897	82
17	212	82	17	165	81	17	117	81	17	0.40070	81	17	0.40024	81	17	979	81
18	293	81	18	246	81	18	198	81	18	151	81	18	105	81	18	0.40060	81
19	374	81	19	327	81	19	279	81	19	232	81	19	186	81	19	141	81
20	455	81	20	408	81	20	360	81	20	313	81	20	267	81	20	222	81
21	536	81	21	489	81	21	441	81	21	394	81	21	348	81	21	303	81
22	617	80	22	570	80	22	522	80	22	475	80	22	429	80	22	384	80
23	697	80	23	650	80	23	602	80	23	555	80	23	509	80	23	464	80
24	777	80	24	730	80	24	682	80	24	635	80	24	589	80	24	544	80
25	857	80	25	810	80	25	762	80	25	715	80	25	669	80	25	624	80
26	937	79	26	890	80	26	842	79	26	795	79	26	749	79	26	704	79
27	0.41016	79	27	970	79	27	921	79	27	874	79	27	828	79	27	783	79
28	095	79	28	0.41049	79	28	0.41000	79	28	953	79	28	907	79	28	862	79
29	174	79	29	128	79	29	079	79	29	0.41032		29	986		29	941	
30	253		30	207		30	158		30	111		30	0.41065		30	0.41020	

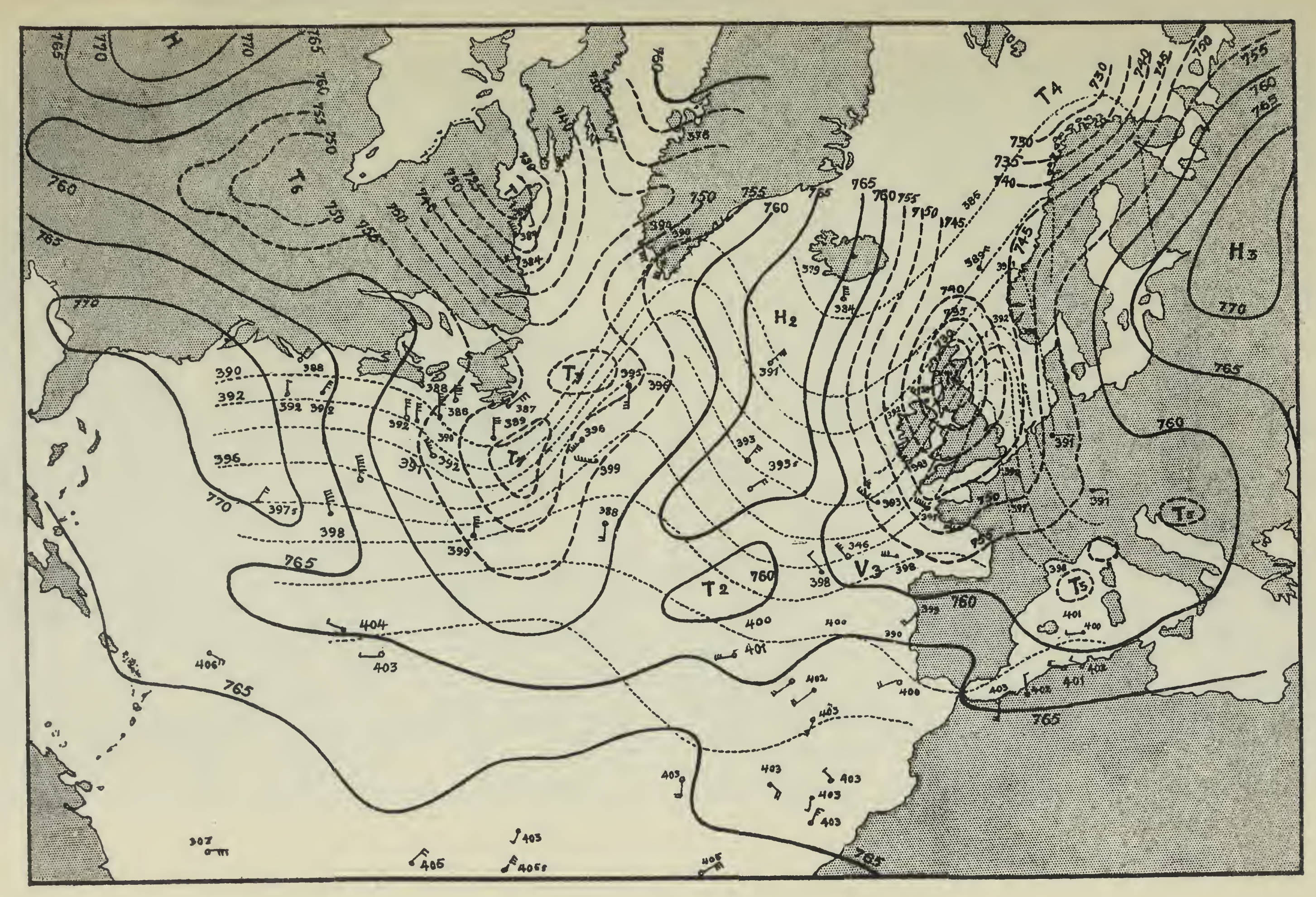
	760			765			770			775			780	
30	0.35734	97	30	0.35689	97	30	0.35644	97	30	0.35599	97	30	0.35556	97
29	831	97	29	786	97	29	741	97	29	696	97	29	653	97
28	928	97	28	883	97	28	838	97	28	793	97	28	750	97
27	0.36025	97	27	980	97	27	935	97	27	890	97	27	847	97
26	122	96	26	0.36077	96	26	0.36032	96	26	987	96	26	944	96
25	218	96	25	173	96	25	128	96	25	0.36083	96	25	0.36040	96
24	314	95	24	269	95	24	224	95	24	179	95	24	136	95
23	409	95	23	364	95	23	319	95	23	274	95	23	231	95
22	504	94	22	459	94	22	414	94	22	369	94	22	326	94
21	598	94	21	553	94	21	508	94	21	463	94	21	420	94
20	692	94	20	647	94	20	602	94	20	557	94	20	514	94
19	786	93	19	741	93	19	696	93	19	651	93	19	608	93
18	879	93	18	834	93	18	789	93	8	744	93	18	701	93
17	972	93	17	927	93	17	882	93	1	837	93	17	794	93
16	0.37065	93	16	0.37020	92	16	975	92	16	930	92	16	887	92
15	158	92	15	112	92	15	0.37067	92	15	0.37022	92	15	979	92
14	250	92	14	204	91	14	159	91	14	114	91	14	0 37071	91
13	342	91	13	295	91	13	250	91	13	205	91	13	162	91
12	433	90	12	386	91	12	341	91	12	296	91	12	253	91
11	523	90	11	477	91	11	432	91	11	387	91	11	344	91
10	613	90	10	568	90	10	523	90	10	478	90	10	435	90
9	703	90	9	658	90	9	613	90	9	568	90	9	525	90
8	793	89	8	748	89	8	703	89	8	658	89	8	615	89
7	882	89	7	837	89	7	792	89	7	747	89	7	704	89
6	971	89	6	926	89	6	881	89	6	836	89	6	793	89
5	0.38060	89	5	0.38015	89	5	970	89	5	925	89	5	882	89
4	149	88	4	104	88	4	0.38059	88	4	0.38014	88	4	991	88
3	237	88	3	192	88	3	147	88	3	102	88	3	0.38059	88
2	325	87	2	280	87	2	235	87	2	190	87	2	147	87
1	412	87	1	367	87	1	322	87	1	277	87	1	234	87
0	499	87	0	454	87	0	409	87	0	364	87	0	321	87
1	586	87	1	541	86	1	496	86	1	451	86	1	408	86
2	673	86	2	627	86	2	582	86	2	537	86	2	494	86
3	759	86	3	713	86	3	668	86	3	623	86	3	580	86
4	845	85	4	799	86	4	754	86	4	709	86	4	666	86
5	930	85	5	885	85	5	840	85	5	795	85	5	752	85
6	0.39015	85	6	970	85	6	925	85	6	880	85	6	837	85
7	100	85	7	0.39055	85	7	0.39010	85	7	965	85	7	922	85
8	185	84	8	140	84	8	095	84	8	0.39050	84	8	0 39007	84
9	269	84	9	224	84	9	179	84	9	134	84	9	091	84
10	353	84	10	308	84	10	263	84	10	218	84	10	175	84
11	437	84	11	392	84	11	347	84	11	302	84	11	259	84
12	521	83	12	476	83	12	431	83	12	386	83	12	343	83
13	604	83	13	559	83	13	514	83	13	469	83	13	426	83
14	687	83	14	642	83	14	597	83	14	552	83	14	509	83
15	770	82	15	725	82	15	680	82	15	635	82	15	592	82
16	852	82	16	807	82	16	762	82	16	717	82	16	674	82
17	934	81	17	889	82	17	844	82	17	799	82	17	756	82
18	0.40015	81	18	971	81	18	926	81	18	881	81	18	838	81
19	096	81	19	0.40052	81	19	0.40007	81	19	962	81	19	919	81
20	177	81	20	133	81	20	088	81	20	0.40043	81	20	0.40000	81
21	258	81	21	214	81	21	169	81	21	124	81	21	081	81
22	339	80	22	295	80	22	250	80	22	205	80	22	162	80
23	419	80	23	375	80	23	330	80	23	285	80	23	242	80
24	499	80	24	455	80	24	410	80	24	365	80	24	322	80
25	579	80	25	535	79	25	490	79	25	445	79	25	402	79
26	659	79	26	614	79	26	569	79	26	524	79	26	481	79
27	738	79	27	693	79	27	648	79	27	603	79	27	560	79
28	817	79	28	772	79	28	727	79	28	682	79	38	639	79
29	896		29	851	79	29	806	79	29	761	79	29	718	79
30	975		30	930		30	885		30	840		30	797	

Lebenslauf.

Ich Ernst August Ansel, wurde am 10. November 1874 zu Ulm, Königreich Württemberg, geboren. Meine Schulbildung erhielt ich am Kgl. Realgymnasium zu Stuttgart. Vor die Berufswahl gestellt, entschied ich mich für den Seemannsberuf, dem ich von 1891 bis 1905 angehörte und in dieser Zeit das Steuermanns- wie das Kapitänspatent für große Fahrt an der Navigationsschule zu Hamburg erworben habe. Um Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren, bezog ich im Herbst 1905 die Kgl. Technische Hochschule zu Stuttgart und im Wintersemester 1907 die Georg August-Universität in Göttingen. Seit 1908 bekleidete ich die Stelle eines Assistenten am Kgl. Geophysikalischen Institut, von dessen Direktor, Herrn Geh. Reg. Rat Prof. Wiechert, meinem hochverehrten Herrn Lehrer, ich vielseitige Anregung empfing, dem ich dafür zu tiefer und dauernder Dankbarkeit verpflichtet bin.



17. November 1893



1. November 1910

2. November 1910

10. Dezember 1910

11. Dezember 1910

12. Dezember 1910

13. Dezember 1910

14. Dezember 1910

15. Dezember 1910

16. Dezember 1910

17. Dezember 1910

18. Dezember 1910

19. Dezember 1910

3 0112 072842260